Е.В. Потоскуев, Л.И. Звавич

ГЕОМЕТРИЯ

задачник

11 класс

Задачник для классов
с углубленным и профильным
изучением математики

Под научной редакцией
А. Р. Рязановского

Допущено Министерством
образования Российской
Федерации

2-е издание, стереотипное

дрофа

Москва · 2004

УДК 373.167.1:514(076.1)
ББК 22.151я72
П64

Потоскуев Е. В.

П64 Геометрия. 11 кл.: Задачник для общеобразовательных учреждений с углуб. и профильным изучением математики / Е. В. Потоскуев, Л. И. Звавич. — 2-е изд., стереотип. — М.: Дрофа, 2004. — 240 с.: ил.

ISBN 5—7107—8311—0

Задачник составляет комплект с учебником по геометрии тех же авторов. Однако он может быть использован и учащимися, занимающимися по другим учебникам и интересующимися математикой, студентами педагогических вузов и репетиторами, занимающимися с абитуриентами, поступающими на факультеты, требующие повышенного уровня математической подготовки, так как содержит большое число задач, которые были предложены на вступительных экзаменах в различные вузы.

Содержание задачника соответствует идеям дифференциации обучения: специальными значками отмечены необходимый для усвоения материал и трудные задачи.

УДК 373.167.1:514(076.1)
ББК 22.151я72

ISBN 5—7107—8311—0

ПРЕДИСЛОВИЕ

Задачник входит в новый учебный комплект по стереометрии для 11 класса с углубленным и профильным изучением математики. Он содержит более 1000 задач, соответствующих теоретическому материалу, изложенному в учебнике, и набор задач по стереометрии из вариантов вступительных экзаменов в различные вузы. Помимо этого, в задачнике имеются:

- **список основных теорем за курс стереометрии 10—11 классов;**
- **метрические формулы планиметрии и стереометрии;**
- **наборы задач для индивидуального изготовления моделей геометрических фигур.**

Активное и эффективное изучение стереометрии возможно лишь при условии решения достаточно большого числа задач различной степени сложности. Поэтому в задачнике изложению теоретического материала каждого параграфа учебника соответствует определенный подбор задач. Задачи по каждой теме систематизированы по принципу «от простого — к сложному».

Авторы, разумеется, не считают, что каждый ученик должен решить все существующие задачи или, наоборот, ограничиться решением задач только данного задачника. В нашей книге в основном помещены наиболее типичные «учебные» задачи, как легкие, так и повышенной трудности.

В связи с большим количеством задач в задачнике мы посчитали разумным отметить специальным значком ☺ те задачи каждого параграфа, которые составляют обязательный минимум для решения миогих задач в классе и дома.

В задачах, соответствующих главе в целом, мы такого ранжирования не делали, так как, с одной стороны, учитель может дифференцированно рекомендовать каждому ученику задачи определенной сложности, а с другой — каждый ученик может самостоятельно выбрать для решения ту или иную задачу: ведь уровень математической подготовки любого ученика возрастает в процессе обучения, и желание решать более интересные (и сложные) задачи становится естественным.

Задачи повышенной трудности отмечены значком ♉.

К абсолютному большинству задач даны ответы, к некоторым — краткие указания, к отдельным — подробные решения. В книге для учителя будут приведены решения некоторых наиболее трудных задач из задачника.

Задачник может быть полезен всем изучающим или повторяющим курс стереометрии, вне зависимости от используемого учебника. Им можно пользоваться на факультативах и спецкурсах, он пригодится и для подготовки к поступлению в вузы.

Авторы выражают огромную благодарность рецензентам: доктору педагогических наук, профессору МПГУ Ирине Михайловне Смирновой, кандидату педагогических наук, заслуженному учителю России, учителю школы № 420 г. Москвы Борису Петровичу Пигареву, учителю школы № 1741 г. Москвы Илье Евгеньевичу Феоктистову, а также преподавателю математики Потоскуевой Тамаре Николаевне за внимательное прочтение рукописи и ценные конструктивные замечания и предложения.

Авторы будут благодарны за все замечания, присланные по адресам: 121096, Москва, а/я 534, Л. И. Звавичу;

445030, г. Тольятти Самарской области, Е. В. Потоскуеву (до востребования).

ЗАДАЧИ ДЛЯ ПОВТОРЕНИЯ ТЕОРЕМ 10 КЛАССА

Для повторения курса стереометрии 10 класса ниже предлагаются две задачи: на изображениях многогранников нужно обосновать взаимное расположение прямых и плоскостей, а также векторов, делая ссылки на соответствующие теоремы, изученные в 10 классе. Приведенная в предложенных задачах нумерация этих теорем та же, что и в учебнике геометрии 10 класса.

Задача 1. *MABCD* — правильная четырехугольная пирамида, *MO* — ее высота, *MK* — апофема грани *MBC*, *AC* — диагональ основания, *ML* — линия пересечения плоскостей *MAB* и *MCD*, точка *F* — середина ребра *AD* (рис. 1). Используя обозначенные на этом рисунке точки, прямые и плоскости, проиллюстрпруйте теоремы:

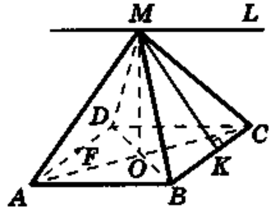


Рис. 1

4. Признак скрещивающихся прямых.

5. О двух параллельных прямых, одна из которых пересекает плоскость.

9. Признак параллельности прямой и плоскости.

10. О линии пересечения плоскостей, одна из которых проходит через прямую, параллельную другой плоскости.

11. О линии пересечения двух плоскостей, каждая из которых проходит через одну из двух параллельных прямых.

12. О прямой, параллельной каждой из двух пересекающихся плоскостей.

13. Признак перпендикулярности прямой и плоскости.

14, 15. Теоремы о трех перпендикулярах.

16. О двух параллельных прямых, одна из которых перпендикулярна плоскости.

17. О двух прямых, перпендикулярных к одной и той же плоскости.

27. О линейных углах двугранного угла.

28. Признак перпендикулярности плоскостей.

29. О прямой, лежащей в одной из двух взаимно перпендикулярных плоскостей и перпендикулярной линии пересечения этих плоскостей.

30. О перпендикуляре к одной из двух взаимно перпендикулярных плоскостей, имеющем с другой плоскостью общую точку.

31. О линии пересечения двух плоскостей, перпендикулярных третьей плоскости.

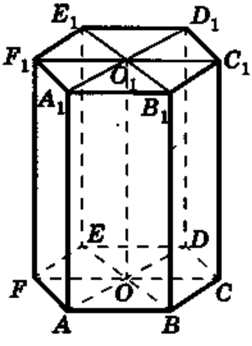


Рис. 2

Задача 2. $ABCDEFA_1B_1D_1E_1F_1$ — правильная шестиугольная призма, в которой проведены все диагонали оснований $ABCDEF$ и $A_1B_1D_1E_1F_1$ (рис. 2). Используя обозначенные на рисунке точки, прямые и плоскости, продемонстрируйте теоремы:

4. Признак скрещивающихся прямых.

5. О двух параллельных прямых, одна из которых пересекает плоскость.

6. О прямой, параллельной данной прямой и проходящей через данную точку пространства, не лежащую на данной прямой.

7. О транзитивности параллельности прямых в пространстве.

8. Об углах между сонаправленными лучами.

9. Признак параллельности прямой и плоскости.

10. О линии пересечения плоскостей, одна из которых проходит через прямую, параллельную другой плоскости.

11. О линии пересечения двух плоскостей, каждая из которых проходит через одну из параллельных прямых.

12. О прямой, параллельной каждой из двух пересекающихся плоскостей.

13. Признак перпендикулярности прямой и плоскости.

14, 15. Теоремы о трех перпендикулярах.

16. О двух параллельных прямых, одна из которых перпендикулярна плоскости.

17. О двух прямых, перпендикулярных к одной и той же плоскости.

18, 19. Признаки параллельности плоскостей.

20. О прямых пересечения двух параллельных плоскостей третьей плоскостью.

21. О прямой, пересекающей одну из параллельных плоскостей.

22. О плоскости, пересекающей одну из параллельных плоскостей.

23. О плоскости, проходящей через точку и параллельной другой плоскости, не проходящей через эту точку.

24. О двух плоскостях, параллельных третьей плоскости.

25. Об отрезках параллельных прямых, заключенных между двумя параллельными плоскостями.

26. О прямой, перпендикулярной к одной из двух параллельных плоскостей.

27. О линейных углах двугранного угла.

28. Признак перпендикулярности плоскостей.

29. О прямой, лежащей в одной из двух взаимно перпендикулярных плоскостей и перпендикулярной линии пересечения этих плоскостей.

30. О перпендикуляре к одной из двух взаимно перпендикулярных плоскостей, имеющем с другой плоскостью общую точку.

31. О линии пересечения двух плоскостей, перпендикулярных третьей плоскости.

33. Признак коллинеарности векторов.

34. Признак компланарности векторов.

35. О разложении вектора в пространстве.

Глава

1 ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ПРОСТРАНСТВА

Задачи к § 1, 2. Отображения пространства. Преобразования пространства

1.001. ☺ Какая фигура при параллельном проектировании пространства на плоскость может служить образом: а) треугольника; б) трапеции; в) параллелограмма; г) тетраэдра; д) куба; е) параллелепипеда? Рассмотрите различные возможные случаи расположения проектируемой фигуры относительно плоскости проекций и направления проектирования.

1.002. Параллельным проектированием в направлении боковых ребер сечение параллелепипеда плоскостью отображается на его основание. Как проходит секущая плоскость, если это отображение является: а) инъективным; б) биективным?

1.003. ☺ Все точки пространства параллельно проектируются на плоскость. Можно ли сказать, что это отображение является преобразованием пространства? Ответ поясните на рисунке.

1.004. ☺ Можно ли взаимно-однозначно отобразить: а) поверхность куба на поверхность другого куба; б) поверхность куба на поверхность прямоугольного параллелепипеда; в) поверхность куба на сферу; г) поверхность тетраэдра на сферу; д) сферу с выколотой точкой на плоскость? Сделайте соответствующие рисунки.

1.005. ☺ Постройте образы вершин тетраэдра $PABC$ при симметрии с центром A. Постройте образ тетраздра $PABC$ при этой симметрии.

1.006. Существуют ли точки, прямые и плоскости, которые центральной симметрией отображаются на себя? Ответ проиллюстрируйте на рисунке.

1.007. ☺ Докажите, что при преобразовании пространства пересечение двух фигур отображается на пересечение образов этих фигур.

1.008. Верно ли, что отображение пространства на себя, сохраняющее расстояние между его двумя любыми точками, является преобразованием пространства?

1.009. Две окружности центрально-симметричны. Могут ли они лежать: а) в одной плоскости; б) на одной сфере; в) в различных плоскостях?

1.010. Многогранник составили из двух равных правильных тетраэдров, имеющих общее основание. Является ли полученная фигура центрально-симметричной?

1.011. ☺ Нарисуйте многогранник, вершинами которого являются центры всех граней куба. Имеет ли этот многогранник центр симметрии? Поясните ответ на рисунке.

1.012. Два куба центрально-симметричны друг другу. Нарисуйте их.

1.013. Может ли центр симметрии фигуры не принадлежать этой фигуре? Поясните ответ на рисунке.

1.014. ☺ Найдите координаты точек, на которые при центральной симметрии с центром в начале координат отображаются соответственно точки $A(0;\ 1;\ -3)$, $K(-2;\ 0;\ 4)$, $C(3;\ -1;\ 5)$, $P(-4;\ 2;\ 0)$, $O(0;\ 0;\ 0)$.

1.015. ☺ Дана точка $M(3;\ 1;\ 2)$. Найдите координаты: а) точки K, симметричной точке M относительно начала координат; б) точки P, симметричной точке M относительно точки K.

1.016. ☺ Даны точки $A(3;\ 1;\ 1)$ и $B(2;\ 5;\ 3)$. Найдите центр симметрии этих точек.

1.017. Даны точки $A(3;\ 2;\ 1)$ и $B(-1;\ 2;\ 6)$. Найдите координаты образа точки B при композиции центральных симметрий: а) $Z_A \circ Z_O$; б) $Z_O \circ Z_A$, где точка O — начало координат.

Задачи к § 3. Движения пространства. Общие свойства движений

1.018. ☺ Даны плоскость α и прямая l, пересекающая α. Каждой точке $M \notin \alpha$ ставится в соответствие такая точка M', что $MM' \parallel l$ и плоскость α делит отрезок MM' пополам. Любой точке плоскости α ставится в соответствие эта же точка. Является ли заданное отображение пространства на себя: а) преобразованием пространства; б) движением?

1.019. ♉ Может ли движение пространства иметь ровно одну неподвижную точку? А ровно две?

1.020. ☺ Движение f пространства имеет неподвижную точку. Имеет ли неподвижную точку движение: а) f^{-1}; б) $f \circ f^{-1}$; в) $f^{-1} \circ f^{-1}$?

1.021. Даны две точки A и B. При движении g пространства оказалось, что $g(A) = B$, $g(B) = A$. Имеет ли неподвижные точки движение: а) g^{-1}; б) $g \circ g^{-1}$; в) $g^{-1} \circ g^{-1}$; г) $g \circ g$?

1.022. ☺ При отображении g сфера отобразилась на другую сферу. Может ли это отображение быть движением?

1.023. ☺ При движении две точки остались неподвижными. Остается ли неподвижной при этом движении прямая, проходящая через эти точки?

1.024. ☺ Движение g пространства имеет неподвижную прямую. 1) Имеет ли неподвижную прямую движение: а) g^{-1}; б) $g \circ g^{-1}$; в) $g^{-1} \circ g^{-1}$? 2) Могут ли движения g и g^{-1} иметь неподвижные плоскости?

1.025. ☺ Даны две плоскости α и β. При движении g оказалось, что $g(\alpha) = \beta$, $g(\beta) = \alpha$. Может ли иметь неподвижные плоскости движение: а) g; б) g^{-1}; в) $g \circ g$; г) $g \circ g^{-1}$? А неподвижные прямые?

1.026. ♉ При движении f пространства три точки, не лежащие на одной прямой, остались неподвижными. Остается ли неподвижной при движении f плоскость, проходящая через эти точки?

1.027. ☺ При некотором движении шар отобразился на себя. Имеет ли это движение неподвижные точки?

1.028. ☺ Может ли движение пространства иметь ровно три неподвижные точки? А ровно четыре?

1.029. $(\vec{i};\ \vec{j};\ \vec{k})$ — ортонормированный базис пространства. При движении g векторы $\vec{i}$ и $\vec{j}$ отображаются соответственно на векторы $\vec{j}$ и $-\vec{i}$. На какой вектор отобразится вектор $\vec{k}$ при этом движении?

1.030. ☺ $(\vec{i};\ \vec{j};\ \vec{k})$ — ортонормированный базис пространства. При движении g векторы $\vec{i}$ и $\vec{k}$ отображаются друг на друга. Найдите образ вектора $\vec{j}$ при этом движении.

1.031. ☺ Докажите, что если две прямые центрально-симметричны, то они лежат в одной плоскости.

1.032. ☺ Сколько центров симметрии имеет: а) отрезок; б) прямая; в) объединение двух прямых; г) плоскость; д) объединение двух плоскостей; е) объединение прямой и плоскости? Ответы поясните на соответственно выполненных рисунках.

1.033. Имеет ли центр симметрии: а) куб; б) правильная треугольная пирамида; в) правильный тетраэдр; г) параллелепипед? Ответы поясните на соответственно выполненных рисунках.

1.034. Из двух равных правильных тетраэдров составлен выпуклый многогранник, имеющий центр симметрии. Нарисуйте этот многогранник.

1.035. $PABC$ — правильный тетраэдр. а) Постройте тетраэдр, центрально-симметричный данному тетраэдру, если центром симметрии является середина O его высоты, проведенной из вершины P. б) Постройте объединение и пересечение данного и построенного тетраэдров.

Решение. а) Для построения образа тетраэдра $PACB$ при симметрии относительно точки O достаточно построить образы его вершин при этой симметрии.

Пусть $A' = Z_O(A)$, $B' = Z_O(B)$, $C' = Z_O(C)$, $P' = Z_O(P)$ (рис. 3).

Соединив попарно полученные точки отрезками прямых, получаем искомый тетраэдр $P'A'B'C' = Z_O(PABC)$. При этом для боковых ребер тетраэдров справедливо

$$Z_O(PA) = P'A' \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow Z_O(P'A') = PA,$$

$$Z_O(PB) = P'B' \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow Z_O(P'B') = PB,$$

$$Z_O(PC) = P'C' \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow Z_O(P'C') = PC.$$

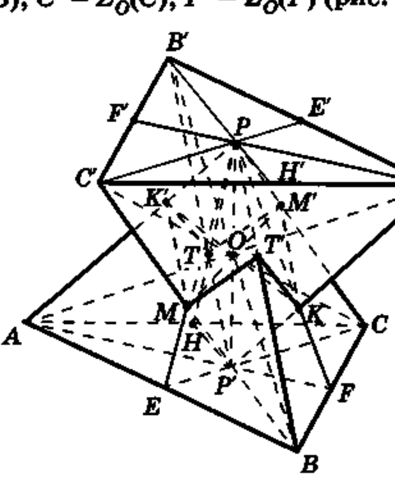


Рис. 3

Для боковых граней тетраэдров имеют место соотношения:

$$Z_O(\triangle ABP) = \triangle A'B'P' \Leftrightarrow Z_O(\triangle A'B'P') = \triangle ABP,$$

$$Z_O(\triangle BCP) = \triangle B'C'P' \Leftrightarrow Z_O(\triangle B'C'P') = \triangle BCP,$$

$$Z_O(\triangle ACP) = \triangle A'C'P' \Leftrightarrow Z_O(\triangle A'C'P') = \triangle ACP.$$

Заметим, что точка P', симметричная точке P относительно центра O, является центроидом треугольника ABC, а точка P — центроидом треугольника $A'B'C'$.

б) Тетраэдры $PABC$ и $P'A'B'C'$ пересекаются, поэтому необходимо правильно выделить и изобразить их видимые и невидимые элементы. Начнем с построения границы пересечения тетраэдров. Рассмотрим вопрос о построении точек пересечения ребер одного из тетраэдров с гранями другого. Построим, например, точку пересечения ребра $P'C'$ тетраэдра $P'A'B'C'$ с гранью ABP тетраэдра $PABC$.

Пусть точка E — середина ребра AB (см. рис. 3). Так как при центральной симметрии прямая отображается на параллельную ей прямую, а $P'C' = Z_O(PC)$, то $P'C' \parallel PC$ и отрезок $P'C'$ лежит в плоскости, проходящей через O и PC, значит, в плоскости CPE. Поэтому $P'C'$ пересекает отрезок PE. Обозначим $M = P'C' \cap PE$. M есть искомая точка пересечения: $M = P'C' \cap (ABP)$.

Учитывая, что при любом преобразовании пересечение фигур отображается на пересечение их образов, а также принимая во внимание соотношения

$$Z_O(P'C') = PC \Leftrightarrow Z_O(PC) = P'C',$$

$$Z_O(\triangle ABP) = \triangle A'B'P' \Leftrightarrow Z_O(\triangle A'B'P') = \triangle ABP,$$

приходим к выводу: точка M должна быть симметрична точке пересечения ребра PC с гранью $A'B'P'$. Поэтому для построения точки пересечения ребра PC с гранью $A'B'P'$ строим точку $M' = Z_O(M)$.

Таким образом, $Z_O(M) = M' = PC \cap (A'B'P')$.

Далее поступаем аналогично. Строим точки:

1. $K = P'A' \cap PF = P'A' \cap (BCP)$, где F — середина отрезка BC.
2. $K' = Z_O(K)$, $K = PA \cap (B'C'P')$.
3. $T = P'B' \cap PH = P'B' \cap (ACP)$, где H — середина отрезка AC.
4. $T' = Z_O(T)$, $T = PB \cap (A'C'P')$.

Пространственная ломаная $MT'KM'TK'M$ — искомая граница пересечения тетраэдров.

Тогда многогранник $ABCM'TK'MT'KA'B'C'$ — объединение тетраэдров, а многогранник $PM'TK'MT'KP'$ — пересечение тетраэдров.

1.036. Дан правильный тетраэдр. Постройте тетраэдр, центрально-симметричный данному, если центр симметрии находится: а) в вершине тетраэдра; б) в центре его грани; в) в середине бокового ребра.

1.037. ☺ Точки $A(2; -3; 0)$ и $H(-4; 3; 2)$ симметричны относительно точки C. Найдите координаты точки C.

1.038. ☺ Докажите, что объединение пересекающихся прямой и плоскости является центрально-симметричной фигурой.

1.039. Дана правильная пирамида $PABCD$. Постройте пирамиду, центрально-симметричную данной, если центр симметрии находится: а) в вершине P; б) в центре основания $ABCD$; в) в середине высоты пирамиды.

1.040. ♉ Даны точка O и фигура F. Рассмотрим все точки пространства, симметричные точке O относительно всех точек фигуры F. Какую фигуру они образуют, если фигура F: а) отрезок; б) прямая; в) плоскость; г) треугольник; д) куб; е) шар? Ответ поясните на рисунке.

1.041. ☺ Имеет ли центр симметрии фигура, состоящая из двух скрещивающихся прямых? Ответ поясните на рисунке.

1.042. ♉ При отображении f куб отобразился на другой куб. Могут ли эти кубы быть неравными? Может ли это отображение быть движением? На какую фигуру при этом отобразится правильный тетраэдр?

1.043. Дан куб. Постройте куб, центрально-симметричный данному, если центр симметрии находится: а) в вершине куба; б) в середине ребра куба; в) в центре грани куба: г) в точке пересечения диагоналей куба; д) в некоторой точке диагонали куба.

1.044. ☺ Напишите уравнение образа плоскости $2x + 3y - z - 5 = 0$ при симметрии относительно начала координат.

1.045. ☺ Напишите уравнения образа прямой $\begin{cases} x = 3 - 2t, \\ y = 5 + 3t, \ t \in R \\ z = -t \end{cases}$ при симметрии относительно начала координат.

Задачи к § 4. Симметрия относительно плоскости

1.046. ☺ Дана плоскость α. Постройте образы следующих фигур при симметрии относительно плоскости α: а) точки, не лежащей в плоскости α; б) отрезка, параллельного плоскости α; в) отрезка, перпендикулярного плоскости α; г) отрезка, ни параллельного, ни перпендикулярного плоскости α; д) прямой, перпендикулярной плоскости α; е) прямой, образующей угол $\varphi \neq 90°$ с плоскостью α; ж) плоскости, образующей угол φ с плоскостью α; з) треугольника и квадрата, лежащих в плоскости, параллельной плоскости α; и) треугольника и квадрата, лежащих в плоскости, не параллельной плоскости α; к) тетраэдра; л) куба; м) сферы.

1.047. $PABC$ — правильный тетраэдр. Точки E, H, K, M — середины отрезков соответственно PA, PB, PC, AB. На какие фигуры при симметрии относительно плоскости CMP отобразятся следующие фигуры: а) точка E; б) точка K; в) отрезок AE; г) $\triangle AEK$; д) $\triangle EHK$; е) $\triangle MCP$; ж) трапеция $ACKE$? Поясните ответ на рисунке.

1.048. ☺ $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — куб. Рассмотрим симметрию относительно плоскости ACC_1. Найдите при симметрии относительно этой плоскости образы следующих фигур: а) точки B_1; б) точки D; в) отрезка BC_1; г) отрезка BD_1; д) треугольника A_1BC_1; е) прямоугольника BB_1D_1D; ж) тетраэдра BAB_1C; з) призмы $ABCA_1B_1C_1$; и) данного куба. Поясните ответ на рисунке.

1.049. ☺ Укажите плоскости симметрии следующих фигур: а) отрезка; б) прямой; в) луча; г) правильного треугольника; д) равнобедренного треугольника; е) квадрата; ж) ромба; з) параллелограмма; и) окружности; к) сферы; л) шара. Поясните ответ на рисунке.

1.050. Два равных круга с центрами A и C лежат в одной плоскости. Найдите плоскость, симметрия относительно которой отображает один круг на другой.

1.051. ☺ Какие: а) точки; б) прямые; в) плоскости при симметрии относительно плоскости отображаются на себя?

1.052. ♉ В правильном тетраэдре окрашены две грани. Сколько плоскостей симметрии у окрашенного таким образом тетраэдра?

1.053. Укажите плоскости симметрии фигуры, являющейся объединением: а) двух правильных тетраэдров, имеющих общее основание; б) двух правильных четырехугольных пирамид, имеющих общее основание.

1.054. ☺ Куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$ так расположен относительно прямоугольной системы координат $Oxyz$, что $A(1;\ 1;\ 0)$, $B(1;\ 2;\ 0)$, $C(2;\ 2;\ 0)$. Найдите координаты всех вершин куба, симметричного данному кубу относительно плоскости: а) Oxy; б) Oyz; в) Oxz.

1.055. ☺ Сколько плоскостей симметрии имеет параллелепипед, если он: а) прямоугольный; б) прямой, а в основании ромб; в) наклонный, а в основании ромб?

1.056. ☺ В основании треугольной пирамиды $PABC$ лежит равнобедренный треугольник $ABC(AB = AC)$. Ребро PA пирамиды перпендикулярно плоскости ABC. Имеет ли эта пирамида плоскость симметрии?

1.057. ☺ Укажите все плоскости симметрии правильного тетраэдра. Поясните ответ на рисунке.

1.058. ♉ В кубе окрашены одним цветом: а) две грани; б) три грани. Сколько плоскостей симметрии имеет окрашенный таким образом куб?

1.059. Даны два равных шара с центрами A и C. Существуют ли плоскости симметрии фигуры, состоящей из этих шаров?

1.060. Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Постройте точку, симметричную точке A относительно плоскости: а) CDD_1; б) BDD_1; в) BDA_1; г) B_1CD_1.

1.061. ☺ Дан правильный тетраэдр. Плоскость α проведена перпендикулярно его высоте через ее середину. Постройте тетраэдр, симметричный данному относительно этой плоскости. Постройте пересечение и объединение данного и построенного тетраэдров.

1.062. ☺ Точки A и B соответственно симметричны точкам A_1 и B_1 относительно плоскости α. Как расположен относительно этой плоскости вектор: а) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{A_1B_1}$; б) $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{A_1B_1}$?

1.063. ☺ Два равных отрезка могут лежать: а) на параллельных прямых; б) на пересекающихся прямых; в) на скрещивающихся прямых. Будут ли они симметричны относительно какой-либо плоскости? Ответ обоснуйте.

1.064. ♉ Куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$ так расположен относительно прямоугольной системы координат $Oxyz$, что $A(1;\ 2;\ 0)$, $B(1;\ 6;\ 0)$, $C(5;\ 6;\ 0)$. Найдите координаты вершин куба, симметричного данному относительно плоскости $x - y = 0$.

1.065. ☺ Существует ли тетраэдр, имеющий: а) ровно одну плоскость симметрии; б) ровно две плоскости симметрии; в) ровно три плоскости симметрии? Выполните рисунки.

1.066. ♉ Точки A и B расположены в одном полупространстве относительно данной плоскости α и не лежат в ней. Постройте в плоскости α такую точку M, сумма расстояний от которой до точек A и B была бы наименьшей.

1.067. Нарисуйте многогранник, имеющий центр симметрии и: а) одну плоскость симметрии; б) две плоскости симметрии; в) три плоскости симметрии.

1.068. Через прямую p проводятся всевозможные плоскости. Точка M удалена от прямой p на расстояние b. Какую фигуру образуют все точки, симметричные точке M относительно этих плоскостей?

1.069. ☺ Дана точка $M(2;\ 3;\ -4)$. Найдите координаты образа этой точки при: а) симметрии относительно плоскости Oyz; б) симметрии относительно плоскости $x - y = 0$; в) композиции симметрий относительно плоскостей Oxy и Oxz; г) композиции симметрий относительно плоскостей $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$.

1.070. ♉ Дан правильный тетраэдр $PABC$; точки M, K, H, E, T — середины ребер соответственно PA, PB, PC, BC, AB; α — плоскость MKH. Постройте образы всех вершин тетраэдра $PABC$ при: а) симметрии S_α; б) композиции симметрий $S_\alpha \circ S_{(APE)}$; в) композиции симметрий $S_{(APE)} \circ S_\alpha$; г) композиции симметрий $S_{(CPT)} \circ S_{(APE)}$; д) композиции симметрий $S_{(CPT)} \circ S_{(APE)}$.

1.071. Даны точки $A(3;\ 1;\ 1)$ и $B(2;\ 5;\ 3)$. Найдите плоскость симметрии данных точек.

1.072. ♉ Дана точка $M(3;\ 1;\ 2)$. Найдите координаты точки F, симметричной точке M относительно плоскости $2x - 3y + z - 1 = 0$.

1.073. ♉ Напишите уравнения образа прямой $\begin{cases} x = 3 - 2t, \\ y = 5 + 3t, \ t \in R \\ z = -t \end{cases}$ при симметрии относительно плоскости Oxy.

1.074. ☺ Напишите уравнение образа плоскости $2x + 3y - z - 5 = 0$ при симметрии относительно плоскости Oxz.

Задачи к § 5. Параллельный перенос. Скользящая симметрия

1.075. Пусть фигура F' получается из фигуры F параллельным переносом на вектор $\vec{a}$. Соединим отрезком каждую точку фигуры F и ее образа при данном переносе и разделим этот отрезок пополам. Докажите, что множество точек деления образует фигуру, равную данной фигуре F.

1.076. ☺ Дан параллелограмм $ABCD$ и вектор $\vec{a}$, не параллельный плоскости этого параллелограмма. Что представляет собой множество концов всевозможных векторов $\overrightarrow{MK} = \vec{a}$, начало M которых принадлежит данному параллелограмму?

1.077. Одна из двух равных окружностей, не лежащих в одной плоскости, получена из другой при некотором параллельном переносе. Имеет ли фигура, состоящая из этих двух окружностей, центр симметрии?

1.078. ☺ Каким должно быть направление вектора переноса, чтобы пересечением куба и его образа при этом переносе был куб?

1.079. ♉ Через стороны AB и CD параллелограмма $ABCD$ провели две параллельные плоскости и в них построили два равных треугольника ABM и DCK ($AM = DK$ и $BM = CK$), расположив их в одном полупространстве относительно плоскости данного параллелограмма. Найдите расстояние между центроидами треугольников ABM и DCK, если $AB = a$, $BC = b$.

1.080. ☺ Треугольник $A_1B_1C_1$ является образом треугольника ABC при параллельном переносе на вектор $\vec{a}$, не параллельный плоскости ABC. Можно ли треугольник $A_1B_1C_1$ получить из треугольника ABC при какой-либо центральной симметрии?

1.081. ☺ При каком положении двух равных фигур одну из них можно отобразить на другую параллельным переносом, если этими фигурами являются: а) два круга; б) два правильных треугольника; в) два квадрата; г) два куба; д) два шара?

1.082. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — куб, O — его центр. Перенос задан вектором $\overrightarrow{BO}$. Постройте: а) образы всех вершин куба; б) образ данного куба; в) объединение данного и построенного кубов.

1.083. ☺ Дан куб. Сколько нужно сделать переносов, чтобы из полученных образов данного куба и самого куба получить вдвое больший куб?

1.084. $ABCA_1B_1C_1$ — правильная призма. Точка O — центр нижнего основания призмы, точка M — середина BC. Перенос задается вектором: а) $\overrightarrow{AO}$; б) $\overrightarrow{MO}$. Постройте: а) образ призмы при этом переносе; б) пересечение и объединение данной и построенной призм.

1.085. ☺ Дана точка $M(2;\ 3;\ -4)$. Найдите образ этой точки при: композиции симметрии относительно плоскости Oxy и переноса на вектор $\vec{p}(2;\ 3;\ 0)$.

1.086. $ABCA_1B_1C_1$ — правильная призма; точки O и O_1 — центры оснований призмы; α — плоскость, перпендикулярная отрезку OO_1 и проходящая через его середину. Постройте образ призмы при композиции: а) $\overrightarrow{OC} \circ S_\alpha$; б) $S_{(ABC)} \circ \overrightarrow{MO}$, где M — середина OO_1.

1.087. ♉ Основания $ABCD$ и $A_1B_1C_1D_1$ ($A_1B_1 > AB$) правильных четырехугольных пирамид $PABCD$ и $P_1A_1B_1C_1D_1$ лежат в одной плоскости так, что их соответственные стороны параллельны; PO и P_1O_1 — высоты этих пирамид, причем $PO > P_1O_1$. Проведите плоскость параллельно плоскости оснований пирамид, чтобы пересечениями этой плоскости с данными пирамидами были равные квадраты.

1.088. В правильном тетраэдре $PABC$ точка O — центр основания ABC, точка M — середина OP. Перенос задается вектором: а) $\overrightarrow{AO}$; б) $\overrightarrow{OM}$. Постройте: а) образ тетраэдра при этом переносе; б) пересечение и объединение данного и построенного тетраэдров.

1.089. ♉ В основании пирамиды $PABCD$ лежит квадрат $ABCD$. Ребро PA пирамиды перпендикулярно ее основанию. Через середину ребра PB проведено сечение, параллельное плоскости APD. Какова площадь сечения, если площадь грани APD равна 32?

1.090. ♉ $PABC$ — правильный тетраэдр; точки M, K, H, E, T — середины ребер соответственно PA, PB, PC, BC, AB; точка O — центроид основания ABC; α — плоскость MKH. Постройте образ тетраэдра $PABC$ при: а) симметрии S_α; б) композиции $S_\alpha \circ S_{(APE)}$; в) композиции $S_{(APE)} \circ S_\alpha$; г) композиции $S_{(CPT)} \circ S_{(APE)}$.

Задачи к § 6. Поворот вокруг оси. Осевая симметрия. Зеркальный поворот. Винтовое движение

1.091. ☺ Какие: а) точки; б) прямые; в) плоскости при осевой симметрии пространства отображаются на себя?

1.092. ☺ Укажите в пространстве оси симметрии следующих фигур: а) отрезка; б) луча; в) прямой; г) плоскости; д) правильного треугольника; е) параллелограмма; ж) окружности; з) сферы; и) куба. Поясните ответ на рисунке.

1.093. ☺ Сколько осей симметрии имеет фигура, состоящая из двух равных правильных: а) треугольных пирамид с общим основанием; б) четырехугольных пирамид с общим основанием?

1.094. ♉ Постройте тетраэдр, имеющий одну ось симметрии.

1.095. Дан правильный тетраэдр $PABC$. Точка O — центр основания ABC. Рассмотрим поворот вокруг оси PO на угол 120°. Постройте образы: а) точек A и B; б) точки E — середины отрезка AB; в) точки K — середины ребра PA; г) точки M, если B — середина CM; д) отрезка KE; е) прямой BK; ж) треугольника EKM.

1.096. ☺ Найдите для любого поворота вокруг оси неподвижные: а) точки; б) прямые; в) плоскости.

1.097. ☺ В кубе закрасили две грани. Всегда ли существует поворот, отображающий куб на себя так, что одна из покрашенных граней отображается на другую? Ответ поясните на рисунке.

1.098. $PABC$ — правильный тетраэдр. Точки E и H — середины его ребер AP и BC. Докажите, что при повороте вокруг прямой KH на угол $180°$ тетраэдр отображается на себя.

1.099. ☺ Прямая l перпендикулярна плоскости α. Рассмотрим поворот вокруг оси l на угол $90°$. Постройте образы: а) точки, лежащей в плоскости α; б) точки, не лежащей в плоскости α; в) отрезка, лежащего в плоскости α; г) отрезка, перпендикулярного плоскости α; д) отрезка, параллельного плоскости α; е) отрезка, пересекающего ось вращения; ж) плоскости, параллельной плоскости α; з) плоскости, перпендикулярной плоскости α.

1.100. $PABC$ — правильный тетраэдр, точка O — центр его основания ABC, точка E — середина ребра AB. Рассматривается поворот вокруг прямой OP на угол $120°$. Постройте пересечение и объединение пирамиды $PACE$ и ее образа при этом повороте.

1.101. ♉ Прямая α проходит через центры O и O_1 оснований $ABCD$ и $A_1B_1C_1D_1$ куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Постройте пересечение и объединение пирамиды O_1ABC и ее образа при повороте вокруг прямой a на угол: а) $90°$; б)$180°$; в) $270°$.

1.102. ♉ Прямая a проходит через центры оснований правильной треугольной призмы. Постройте: а) образ призмы при повороте вокруг прямой a на угол $60°$; б) объединение и пересечение данной призмы и построенной.

1.103. В тетраэдре $PABC$ грани BCA и BCP — равные равнобедренные треугольники ($AB = BP = CP = CA$). Найдется ли поворот, отображающий тетраэдр на себя?

1.104. ☺ Правильный тетраэдр $PABC$ повернули вокруг его высоты PO на угол $60°$. Постройте его образ при этом повороте. Начертите пересечение и объединение данного и построенного тетраэдров.

1.105. ☺ Найдите все повороты пространства, отображающие на себя: а) правильную треугольную пирамиду; б) правильную четырехугольную пирамиду; в) правильный тетраэдр.

1.106. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — куб; $O = AC \cap BD$, $O_1 = A_1C_1 \cap B_1D_1$, α — плоскость, проходящая перпендикулярно отрезку OO_1 через его середину. Рассматривается композиция поворота вокруг прямой OO_1 на угол $90°$ и симметрии относительно плоскости α. 1) Найдите образы точек A, C_1, H, K, где H — середина ребра AA_1, K — середина ребра A_1B_1. 2) Найдите прообразы точек A, C_1, H, K. 3) Найдите образ отрезка: а) AB; б) BC_1; в) BD_1; г) PT, где T — середина отрезка A_1D_1. 4) Постройте пересечение и объединение тетраэдра $ABCB_1$ и его образа при этой композиции преобразований.

1.107. Сколько осей симметрии имеет: а) правильный тетраэдр; б) правильная четырехугольная пирамида? Поясните ответ на рисунке.

Решение. а) Пусть точки E и K — середины ребер соответственно AB и PC правильного тетраэдра $PABC$ (рис. 4). Тогда $\triangle PCE$ — равнобедренный ($EC = EP$, как медианы равных равносторонних треугольников ABC и ABP), поэтому $EK \perp PC$.

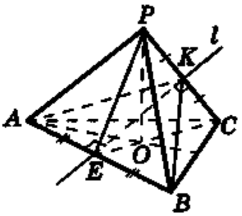


Рис. 4

Аналогично, $\triangle ABK$ — равнобедренный ($AK = BK$), откуда $EK \perp AB$. Таким образом, прямая $l = EK$ является общим серединным перпендикуляром отрезков AB и CP. Поэтому при симметрии относительно прямой l имеем $S_l(PC) = CP$, $S_l(AB) = BA$, $S_l(A) = B$, $S_l(C) = P \Rightarrow S_l(AC) = BP$, $S_l(A) = B$; $S_l(P) = C \Rightarrow S_l(AP) = BC$.

Это означает, что симметрия относительно прямой l вершины, ребра и грани тетраэдра $PABC$ отображает на вершины, ребра и грани этого же тетраэдра, т. е. этот тетраэдр при симметрии относительно прямой l отображается на себя. Следовательно, прямая l является осью симметрии тетраэдра $PABC$.

Аналогично, осями симметрии тетраэдра $PABC$ являются еще две прямые, одна из которых проходит через середины ребер AP и BC, другая — через середины ребер AC и BP.

Таким образом, правильный тетраэдр имеет три оси симметрии. Можно показать, что других осей симметрии у правильного тетраэдра нет.

Вопрос о числе осей симметрии правильной четырехугольной пирамиды рассмотрите самостоятельно.

1.108. ☺ Каково взаимное положение двух прямых a и l, если $a \cap l = \varnothing$, $S_l(a) = a'$, $a' \| a$? Поясните ответ на рисунке.

1.109. Каково взаимное положение прямых a и $a' = S_l(a)$, если известно, что: а) $a \| l$; б) $a \cap l \neq \varnothing$, $a \perp l$; в) $a \cap l = \varnothing$, $a \perp l$? Поясните ответ на рисунке.

1.110. ☺ Постройте ось симметрии фигуры, являющейся объединением двух прямых, проходящих через: а) скрещивающиеся ребра куба; б) противоположные ребра правильного тетраэдра; в) скрещивающиеся диагонали противоположных граней куба; г) скрещивающиеся диагональ куба и диагональ его грани.

1.111. ♉ В правильном тетраэдре покрасили две грани. Всегда ли существует поворот, отображающий тетраэдр на себя так, что одна из покрашенных граней окажется на месте другой? Ответ поясните на рисунке.

1.112. Даны две точки A и C. а) При каком повороте одна из них отображается на другую? б) При каком повороте каждая из них отображается на другую? в) Какую фигуру заполняют оси всех таких поворотов в каждом случае? Ответ поясните на рисунке.

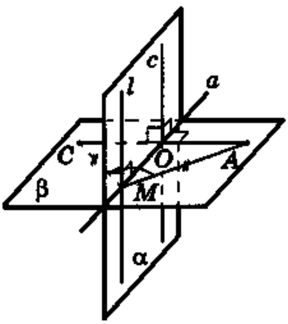


Рис. 5

Решение. а) Из планиметрии известно, что центры всех поворотов плоскости, при которых точка A отображается на точку C, принадлежат серединному перпендикуляру отрезка AC.

Проведем через середину O отрезка AC плоскость α, перпендикулярную AC (рис. 5).

В этой плоскости лежат все прямые пространства, проходящие перпендикулярно отрезку AC через его середину — точку O.

Пусть a — одна из таких прямых. Проведем через прямые AC и a плоскость β. Любая точка M прямой a является центром поворота плоскости β, при котором точка A отображается на точку C. Значит, прямая l, проведенная через точку M перпендикулярно плоскости β, лежит в плоскости α и является осью поворота пространства, при котором точка A отображается на точку C.

Из сказанного следует, что любая прямая плоскости α, перпендикулярная прямой a, является осью поворота пространства, при котором точка A отображается на точку C. Все оси таких поворотов образуют в плоскости α пучок прямых, параллельных прямой l, и заполняют эту плоскость.

Изменяя положение прямой a (вращая ее вокруг точки O), будем получать новые положения плоскости β и новые повороты, оси которых будут расположены в плоскости α и параллельны новому положению (направлению) прямой $l \perp \beta$; при любом из таких поворотов точка A отображается на C. Каждый раз эти оси будут образовывать пучок параллельных прямых и заполнять одну и ту же плоскость α.

Таким образом, осью поворота, отображающего точку A на точку C, может быть любая прямая плоскости α, проходящей перпендикулярно отрезку AC через его середину O.

б) Рассмотрим прямую c, проходящую перпендикулярно отрезку AC через его середину O (рис. 5). Эта прямая лежит в плоскости α ($AC \perp \alpha$). Поворот вокруг прямой c на угол 180° отображает точки A и C одну на другую; $R_c^{180°}(A) = C$ и $R_c^{180°}(C) = A$. Все такие прямые образуют пучок с центром O и заполняют плоскость α.

Ответ: а) повороты вокруг любой прямой плоскости α, проходящей перпендикулярно отрезку AC через его середину;

б) повороты на 180° вокруг любой прямой, проходящей перпендикулярно отрезку AC через его середину;

в) оси поворотов (всех) заполняют плоскость α.

1.113. ♉ Правильную треугольную пирамиду повернули вокруг высоты на угол 180°. Постройте: а) образ пирамиды при этом повороте; б) пересечение и объединение данной пирамиды и построенной.

1.114. ☺ Найдите поворот, отображающий: а) одну из двух равных сфер на другую; б) один из двух равных отрезков на другой.

1.115. Два равных круга с центрами K и H лежат в плоскости α. а) При каком повороте круг с центром K отображается на круг с центром H? б) При каком повороте круги отображаются друг на друга?

1.116. Даны два равных шара с центрами M и P. а) При каком повороте один из шаров отобразится на другой? б) Найдется ли такой поворот, при котором шары отобразятся друг на друга?

1.117. ♉ Прямая a проходит через центры оснований $ABCD$ и $A_1B_1C_1D_1$ куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Постройте пересечение и объединение: а) призмы $ABCA_1B_1C_1$ и ее образа при повороте вокруг прямой a на угол 90°; б) тетраэдра A_1ABD и его образа при повороте вокруг прямой a на угол 270°.

1.118. ☺ Даны две точки A и B. Укажите все основные движения, отображающие точку A на точку B.

1.119. ☺ Даны два равных отрезка AB и A_1B_1. Укажите все основные движения (или их композиции), отображающие отрезок AB на отрезок A_1B_1.

1.120. ☺ Треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ равны ($AB = A_1B_1$, $BC = B_1C_1$, $AC = A_1C_1$). Укажите все движения, отображающие треугольник ABC на треугольник $A_1B_1C_1$.

1.121. ☺ Даны точки $A(1; 3; -1)$ и $B(7; 5; -1)$. Приведите примеры движений, отображающих точку A на B.

1.122. ♉ Дана точка $M(3; 1; 2)$. Найдите координаты точки H — образа точки M при вращении вокруг оси Ox на угол 90°.

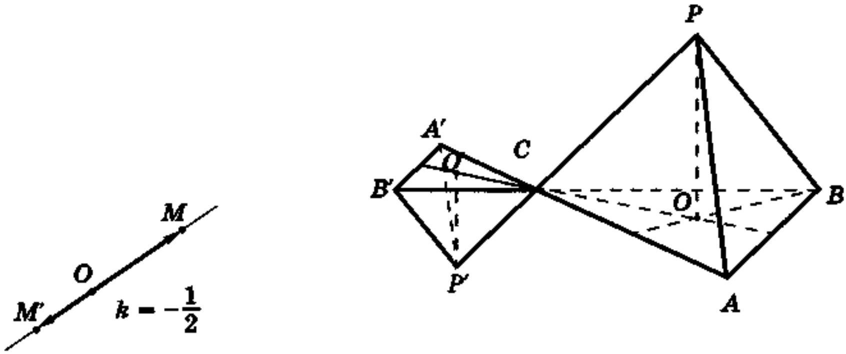
Задачи к § 7, 8. Взаимосвязь различных видов движений. Гомотетия и подобие пространства

1.123. $PABC$ — правильный тетраэдр. Постройте его образ при гомотетии: 1) с центром C и коэффициентом, равным: а) 2; б) $\frac{1}{2}$; в) $-\frac{1}{2}$; г) -1; 2) с центром в центре грани ABC и коэффициентом, равным: а) $\frac{1}{2}$; б) -1.

Решение. 1. в) Пусть при гомотетии $H_O^{-\frac{1}{2}}$ точка M отображается на точку M': $H_O^{-\frac{1}{2}}(M) = M'$. Тогда:

1) $\overrightarrow{OM} \uparrow\downarrow \overrightarrow{OM'}$, т. е. точка O лежит между точками M' и M (рис. 6, *а*); 2) $|\overrightarrow{OM'}| = \frac{1}{2}|\overrightarrow{OM}|$, т. е. расстояние от точки M' до точки O в два раза меньше расстояния от точки M до точки O.

Принимая это во внимание, строим (рис. 6, *б*) точки $A' = H_C^{-\frac{1}{2}}(A)$, $B' = H_C^{-\frac{1}{2}}(B)$, $P' = H_C^{-\frac{1}{2}}(P)$. Заметим, что центр гомотетии отображается на себя: $H_C^{-\frac{1}{2}}(C) = (C)$. Тогда отрезок AB при этой гомотетии отображается на параллельный ему отрезок $A'B'$, причем $A'B' = \frac{1}{2}AB$.



а) *б)*

Рис. 6

Для остальных ребер тетраэдра $PABC$ имеем:

$H_C^{-\frac{1}{2}}(BC) = B'C$, $B'C = \frac{1}{2}BC$, точка B' лежит на прямой BC;

$H_C^{-\frac{1}{2}}(AC) = A'C$, $A'C = \frac{1}{2}AC$, точки A, A', C лежат на одной прямой;

$H_C^{-\frac{1}{2}}(AP) = A'P'$, $A'P' = \frac{1}{2}AP$, $A'P' \parallel AP$;

$H_C^{-\frac{1}{2}}(BP) = B'P'$, $B'P' = \frac{1}{2}BP$, $B'P' \parallel BP$;

$H_C^{-\frac{1}{2}}(CP) = CP'$, $CP' = \frac{1}{2}CP$, точка P' лежит на прямой CP.

Так как точки A, B, C, P не лежат в одной плоскости, то точки A', B', C, P' также не лежат в одной плоскости. Соединив отрезками прямых попарно эти точки, получаем тетраэдр $P'A'B'C$, который гомотетичен данному тетраэдру при гомотетии $H_C^{-\frac{1}{2}}$:

$H_C^{-\frac{1}{2}}$(тетраэдр $PABC$) = тетраэдр $P'A'B'C$.

Грани тетраэдра $P'A'B'C$ являются образами соответствующих граней тетраэдра $PABC$.

$H_C^{-\frac{1}{2}}(\triangle ABC) = \triangle A'B'C$, $H_C^{-\frac{1}{2}}(\triangle ABP) = \triangle A'B'P'$,

$H_C^{-\frac{1}{2}}(\triangle BCP) = \triangle B'CP'$, $H_C^{-\frac{1}{2}}(\triangle ACP) = \triangle A'CP'$.

При этом соответствующие грани данного и построенного тетраэдров лежат в параллельных плоскостях или в одной плоскости.

1.124. ☺ Составьте уравнение образа плоскости $2x - y - 4z + 5 = 0$ при гомотетии с центром в начале координат и коэффициентом, равным: а) 3; б) $\frac{1}{3}$; в) -2; г) $-\frac{1}{2}$.

1.125. Докажите, что подобие сохраняет отношение длин двух отрезков.

1.126. В результате некоторого преобразования сфера отобразилась на другую сферу. Является ли это преобразование подобием?

1.127. $ABCDA'B'C'D'$ — куб. Постройте его образ при гомотетии: а) с центром A и коэффициентом, равным $\frac{1}{2}$; $-\frac{1}{2}$; б) с центром в точке пересечения диагоналей куба и коэффициентом, равным $\frac{1}{2}$; $-\frac{1}{2}$; -1; 2.

1.128. В системе координат $Oxyz$ правильный тетраэдр $PABC$ так расположен, что $A(-2;\ 0;\ 0)$, $B(2;\ 0;\ 0)$, $C(0;\ 2\sqrt{3};\ 0)$. Рассматривается гомотетия: а) с центром O и коэффициентом $\frac{1}{2}$; б) с центром A и коэффициентом -1. Найдите координаты всех вершин тетраэдра, гомотетичного данному тетраэдру при этой гомотетии. Постройте эти тетраэдры.

1.129. ♉ В системе координат $Oxyz$ куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$ расположен так, что $A(1;\ 1;\ 0)$, $B(1;\ 4;\ 0)$, $C(4;\ 4;\ 0)$, $D(4;\ 1;\ 0)$, $A_1(1;\ 1;\ 3)$. Рассматривается гомотетия: а) с центром O и коэффициентом -1; б) с центром в центре квадрата $ABCD$ и коэффициентом 2. Найдите координаты всех вершин куба, гомотетичного данному кубу при этой гомотетии. Постройте эти кубы.

1.130. ☺ Какие точки, прямые и плоскости при гомотетии отображаются на себя?

1.131. ☺ Докажите, что подобны: а) два куба; б) два правильных тетраэдра.

1.132. ☺ Пусть плоская фигура имеет: а) центр симметрии; б) ось симметрии. Сохраняется ли это свойство у подобной ей фигуры?

1.133. ☺ В результате подобного преобразования треугольник ABC отобразился на треугольник $A'B'C'$. Найдите образы: а) медианы; б) точки пересечения медиан; в) биссектрисы; г) точки пересечения биссектрис; д) высоты; е) точки пересечения высот; ж) центра описанной окружности.

1.134. ♉ Докажите, что тетраэдр, вершинами которого служат центры P_1, A_1, B_1, C_1 граней правильного тетраэдра $PABC$, подобен этому тетраэдру. Найдите коэффициент подобия, отображающего тетраэдр $PABC$ на тетраэдр $P_1A_1B_1C_1$.

1.135. ♉ Две неравные окружности ω и ω_1 лежат в различных плоскостях α и β соответственно. Найдите преобразования, композиция которых отображает окружность ω на окружность ω_1.

Задачи после главы 1 «Преобразования пространства»

1.136. ♉ При некотором отображении пространства точка $(x;\ y;\ z)$ в прямоугольной системе координат $Oxyz$ отображается на точку: а) $(-x;\ -y;\ z)$; б) $(x;\ |y|;\ z)$; в) $(0;\ y;\ 0)$; г) $(y;\ x;\ z)$; д) $(x;\ 3y;\ z)$. 1) Какое из этих отображений является преобразованием пространства? 2) Имеет ли отображение неподвижные: а) точки; б) прямые; в) плоскости?

1.137. Прямая a проходит через центры оснований куба. Постройте: а) образ куба при повороте вокруг прямой a на угол 45°; б) пересечение и объединение данного куба и построенного.

1.138. Дан правильный тетраэдр $PABC$; l, m — прямые, содержащие высоты тетраэдра, проведенные из вершин соответственно P и A. Найдите образы всех вершин тетраэдра при композиции вращения $R_m^{120^\circ} \circ R_l^{120^\circ}$.

1.139. ♉ Нарисуйте треугольную пирамиду, имеющую две плоскости симметрии.

1.140. ♉ Существует ли многогранник, имеющий любое наперед заданное число плоскостей симметрии?

1.141. ♉ Нарисуйте ограниченную невыпуклую фигуру, имеющую: а) бесконечное множество плоскостей симметрии; б) любое наперед заданное число плоскостей симметрии.

1.142. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — куб; $O = AC \cap BD$, $O_1 = A_1C_1 \cap B_1D_1$; α — плоскость, проходящая перпендикулярно отрезку OO_1 через его середину. Рассматривается композиция поворота вокруг прямой OO_1 на угол 90° и симметрии относительно плоскости α. 1) Найдите образы точек A, C_1, H, K, где H — середина ребра AA_1, K — середина ребра A_1B_1. 2) Найдите прообразы точек A, C_1, H, K. 3) Найдите образ отрезка: а) AB; б) BC_1; в) BD_1; г) PT, где T — середина отрезка A_1D_1. 4) Постройте пересечение и объединение тетраэдра $ABCB_1$ и его образа при этой композиции преобразований.

1.143. ♉ Докажите, что ограниченная фигура не может иметь более одного центра симметрии.

1.144. ♉ Имеет ли ось симметрии фигура, состоящая из двух скрещивающихся прямых? Поясните ответ на рисунке.

1.145. Докажите, что если ограниченная фигура имеет центр симметрии и ось симметрии, то центр симметрии лежит на оси симметрии.

1.146. Найдите все повороты пространства, отображающие куб на себя.

1.147. Правильную четырехугольную пирамиду повернули вокруг высоты на угол 45°. Постройте: а) образ пирамиды при этом повороте; б) пересечение и объединение данной пирамиды и построенной.

1.148. ♉ Даны прямая l и точки A и C. На прямой l постройте такую точку M, чтобы сумма $AM + MC$ длин отрезков AM и MC была наименьшей, если: а) точки A, C и прямая l лежат в одной плоскости; б) точки A, C и прямая l не лежат в одной плоскости.

1.149. Докажите, что подобие пространства, отличное от движения, есть композиция гомотетии и движения.

1.150. Может ли в результате некоторого переноса куб отобразиться на такой куб, что их пересечением будет новый куб? Поясните ответ на рисунке.

1.151. ♉ Ограниченная фигура имеет центр симметрии и плоскость симметрии. Докажите, что центр симметрии лежит в плоскости симметрии.

1.152. ♉ $PABC$ — правильный тетраэдр. Точки A_1, B_1, C_1, P_1 — центроиды его граней соответственно BCP, ACP, ABP, ABC. Докажите, что тетраэдр $P_1A_1B_1C_1$ гомотетичен данному тетраэдру. Найдите центр и коэффициент этой гомотетии.

1.153. Куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$ так расположен относительно прямоугольной системы координат $Oxyz$, что $A(4; 0; 0)$, $B(5; 4; 0)$, $C(1; 5; 0)$. Найдите координаты всех вершин куба, симметричного данному относительно: а) начала координат; б) плоскости Oxz; в) координатной оси Oy.

1.154. Дан правильный тетраэдр $PABC$. Строятся точки, симметричные каждой вершине тетраэдра относительно противоположной ей грани. Постройте тетраэдр с вершинами в полученных точках и докажите, что он правильный. Найдите коэффициент подобия этих тетраэдров.

1.155. ♉ Точка M не принадлежит данным пересекающимся плоскостям α и β. Найдите в плоскости α точку A, а в плоскости β точку B такие, чтобы треугольник ABM имел наименьший периметр.

1.156. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — куб объема V. Точка K выбрана на диагонали B_1D куба так, что $B_1K : KD = 1 : 3$. Рассматривается центральная симметрия относительно точки K, при которой данный куб отображается на куб $A'B'C'D'A_1'B_1'C_1'D_1'$. Найдите объем: а) общей части этих кубов; б) объединения этих кубов.

1.157. В системе координат $Oxyz$ куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$ расположен так, что $A(5; 0; 0)$, $B(1; 1; 0)$, $C(2; 5; 0)$, $D(6; 4; 0)$. Рассматривается гомотетия: а) с центром O и коэффициентом -1; б) с центром A и коэффициентом $\frac{1}{2}$; в) с центром в центре квадрата $ABCD$ и коэффициентом 2. Найдите координаты всех вершин куба, гомотетичного данному кубу при этой гомотетии.

1.158. Правильный тетраэдр $PABC$ так расположен в системе координат $Oxyz$, что $A(0; 1; 0)$, $B(0; 7; 0)$, $C(3\sqrt{3}; 4; 0)$. Рассматривается гомотетия: а) с центром O и коэффициентом -1; б) с центром в центре M основания ABC и коэффициентом $-\frac{1}{2}$; в) с центром A и коэффициентом $\frac{1}{3}$. Найдите координаты всех вершин тетраэдра, гомотетичного данному тетраэдру при этой гомотетии.

Глава

2 МНОГОГРАННИКИ

Задачи к § 9. Понятие многогранника

2.001. ☺ Является ли телом фигура: а) состоящая из двух шаров, не имеющих общих точек; б) состоящая из двух шаров, имеющих одну общую точку; в) являющаяся объединением двух кубов, имеющих общую вершину (общее ребро)? Ответ поясните на рисунке.

2.002. ☺ Тело F является пересечением двух тел F_1 и F_2. Каким будет тело F, если F_1 и F_2 — выпуклые тела?

2.003. Приведите пример тела, каждое сечение которого плоскостью, проходящей через некоторую прямую, состоит из двух равных кругов.

2.004. ☺ Начертите многогранник, у которого сечениямн могут быть: а) квадрат; прямоугольник; правильный треугольник; правильный шестиугольник; трапеция; ромб; б) правильный треугольник; квадрат; трапеция.

2.005. Назовите многогранник, имеющий наименьшее число граней. Сколько у него вершин, ребер?

2.006. ☺ Может ли гранью пятигранника быть: а) четырехугольник; б) пятиугольник? Ответ поясните на рисунке.

2.007. Одна из граней многогранника — пятиугольник. а) Какое наименьшее число ребер может иметь этот многогранник? б) Какое наименьшее число граней может иметь этот многогранник?

2.008. Начертите многогранник, имеющий: а) шесть ребер; б) восемь ребер; в) девять ребер.

2.009. ☺ Начертите несколько различных разверток: а) правильного тетраэдра; б) куба.

2.010. ☺ В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ проведено сечение через середины ребер A_1B_1, B_1C_1 и точку D, разбившее куб на два многогранника. Определите количество ребер, вершин и граней того из них, которому принадлежит вершина B.

2.011. Грани куба покрыли краской и затем, разделив каждое ребро на 10 равных частей, провели через точки деления сечения плоскостями, перпендикулярными этому ребру, в результате чего куб «распался» на меньшие кубы. Сколько всего образовалось этих кубов? Сколько из них не имеют ни одной окрашенной грани; одну окрашенную грань; две окрашенные грани; три окрашенные грани; более трех окрашенных граней?

2.012. ☺ Разверткой треугольной пирамиды является треугольник со сторонами 13, 13 и 10. Найдите длины всех боковых ребер и площадь полной поверхности этой пирамиды.

2.013. ☺ У пирамиды 98 ребер. Сколько у нее вершин и граней?

2.014. ☺ В призме 255 ребер. Найдите количество граней и вершин этой призмы.

2.015. ♉ В прямоугольном треугольнике ABC угол C прямой. Отрезок CP перпендикулярен плоскости ABC. Как расположена точка M относительно тетраэдра $PABC$, если эта точка: а) равноудалена от всех вершин тетраэдра; б) равноудалена от всех граней тетраэдра?

2.016. ☺ Начертите многогранник: а) не являющийся тетраэдром, все грани которого — треугольники; б) не являющийся кубом, все грани которого — квадраты; в) все грани которого — неравные четырехугольники; г) восемь граней которого — равные правильные треугольники, а еще шесть граней — равные шестиугольники; д) восемь граней которого — равные правильные треугольники, а еще шесть граней — равные квадраты.

2.017. ♉ Докажите, что не существует многогранника, имеющего семь ребер.

2.018. ♉ а) Докажите, что у любого многогранника число граней с нечетным числом сторон четно. ♉ б) Докажите, что у любого многогранника число вершин, в которых сходится нечетное число ребер, четно.

2.019. ♉ Дан шестигранник $ABCDA_1B_1C_1D_1$, у которого грань $ABCD$ — ромб со стороной 6 и углом BAD, равным 60°. Ребра AA_1, BB_1, CC_1, DD_1 перпендикулярны плоскости $ABCD$, причем $AA_1 = 7$, $BB_1 = 6$, $CC_1 = 5$. Найдите: а) длины остальных ребер; б) угол между плоскостью ABC и прямой A_1C_1; в) угол между плоскостями ABC и $A_1B_1C_1$; г) самую большую диагональ шестигранника.

Задачи к § 10—11.1. Объемы многогранников. Определение призмы. Виды призм

2.020. ☺ В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ все ребра равны между собой. Найдите угол между прямыми CB_1 и AA_1.

2.021. ☺ (*Устно.*) Боковое ребро правильной треугольной призмы равно 6 см, а сторона основания равна 8 см. Найдите площадь сечения призмы плоскостью, проходящей через сторону нижнего основания и противоположную вершину верхнего основания.

2.022. ☺ В прямой треугольной призме стороны основания равна 10, 17 и 21, а высота 18. Найдите площадь сечения, проведенного через боковое ребро и меньшую высоту основания.

2.023. ☺ Основанием прямой призмы служит ромб; диагонали призмы равны 8 см и 5 см, а высота 2 см. Найдите сторону основания.

2.024. В правильной четырехугольной призме площадь боковой грани равна Q. Найдите площадь диагонального сечения.

2.025. ☺ В прямой треугольной призме через сторону основания под углом 45° к нему проведена плоскость, пересекающая противоположное боковое ребро. Найдите площадь сечения, если площадь основания равна Q.

2.026. В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ сторона AB основания равна a, высота AA_1 равна h. Найдите угол между прямыми AB_1 и BC_1.

2.027. Докажите, что если в правильной четырехугольной призме $ABCDA_1B_1C_1D_1$ диагонали B_1D и BD_1 взаимно перпендикулярны, то диагонали A_1C и B_1D образуют угол в 60°.

Решение. Боковые ребра правильной призмы перпендикулярны основанию, поэтому BDD_1B_1 — прямоугольник (рис. 7). У него диагонали B_1D и BD_1 взаимно перпендикулярны. Значит, BDD_1B_1 квадрат, откуда $BB_1 = BD$.

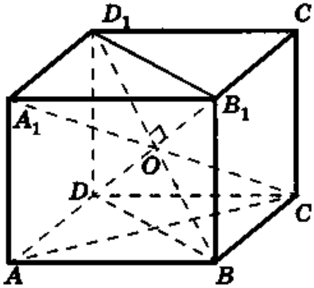


Рис. 7

Пусть $BB_1 = BD = a$. Тогда $B_1D = D_1B = A_1C = a\sqrt{2}$.

Если O — точка пересечения диагоналей призмы, то в квадрате BDD_1B_1 находим $B_1O = D_1O = \frac{a\sqrt{2}}{2}$. Далее, $\triangle ABC$: $AC = a \Rightarrow AB = \frac{a\sqrt{2}}{2}$.

Таким образом, в $\triangle A_1OB_1$ имеем $A_1O = B_1O = AB = A_1B_1$, откуда $\triangle A_1OB_1$ — правильный, поэтому $\angle A_1OB_1 = 60°$. Это означает: $\angle(A_1C, B_1D) = 60°$, что и требовалось доказать.

2.028. ☺ Диагональ основания правильной четырехугольной призмы равна $10\sqrt{2}$ см, а высота 20 см. Найдите: а) диагональ призмы; б) площадь диагонального сечения призмы; в) площадь сечения, проходящего через противоположные стороны оснований призмы; г) площадь сечения призмы, проходящего через сторону основания под углом 45° к нему.

2.029. Диагональ основания правильной четырехугольной призмы равна $4\sqrt{2}$ см, а диагональ призмы наклонена к плоскости основания под углом 60°. Найдите площадь сечения призмы, проходящего через сторону нижнего основания и противолежащую сторону верхнего основания.

2.030. ☺ Основанием прямой призмы является прямоугольный треугольник с катетами 20 см и 21 см. Через середину гипотенузы перпендикулярно к ней проведена плоскость. Найдите площадь сечения, если боковое ребро призмы равно 42 см.

2.031. Каждое ребро правильной шестиугольной призмы $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ равно a. Постройте сечение призмы плоскостью, проходящей через: а) вершины A, C и D_1; б) вершины A, B и E_1. Вычислите площади этих сечений.

2.032. Диагональ BD_1 правильной четырехугольной призмы $ABCDA_1B_1C_1D_1$ равна a и образует с плоскостью боковой грани BCC_1B_1 угол в 30°. Найдите: а) угол между этой диагональю и плоскостью основания; б) площадь диагонального сечения BC_1D_1A; в) площадь диагонального сечения BB_1D_1D.

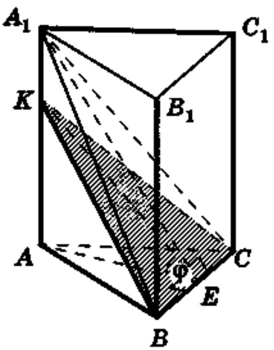


Рис. 8

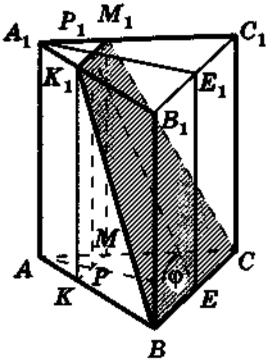


Рис. 9

2.033. В правильной четырехугольной призме через диагональ основания проведено сечение параллельно диагонали призмы. Найдите площадь сечения, если высота призмы равна 4 см, а сторона ее основания 2 см.

2.034. В правильной треугольной призме со стороной основания, равной a, и высотой, равной H, через сторону нижнего основания под углом φ к нему проведена плоскость. Найдите площадь сечения.

Решение. Пусть секущая плоскость α проходит через сторону BC основания ABC правильной призмы $ABCA_1B_1C_1$. В зависимости от величины угла φ эта плоскость может пересекать боковое ребро AA_1 (рис. 8) или не пересекать его (в этом случае плоскость α пересекает прямую, проходящую через ребро AA_1) (рис. 9).

Рассмотрим каждый из этих случаев.

1. $\alpha \cap AA_1 = K$, где K — точка ребра AA_1 (см. рис. 8). Пусть точка E — середина стороны BC. Тогда $AE \perp BC \Rightarrow KE \perp BC$ (по теореме о трех перпендикулярах). Значит, $\angle AEK = \varphi$.

Если секущая плоскость проходит через вершину A_1, то сечением призмы является равнобедренный (почему?) $\triangle BA_1C$ и $\operatorname{tg}\varphi = \dfrac{AA_1}{AE}$. Значит, при условии $\operatorname{tg}\varphi \leqslant \dfrac{AA_1}{AE} = \dfrac{2H}{a\sqrt{3}}$ сечение призмы — равнобедренный $\triangle BCK$ $(AK \leqslant AA_1)$. Найдем площадь этого треугольника.

Так как $\triangle ABC$ — ортогональная проекция треугольника BCK, то $S_{\triangle BCK} = \dfrac{S\triangle_{ABC}}{\cos\varphi} = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4\cos\varphi}$.

2. $\operatorname{tg}\varphi > \frac{2H}{a\sqrt{3}}$. В этом случае секущая плоскость α пересекает верхнее основание призмы по отрезку $K_1M_1 \| BC$ (см. рис. 9). Сечением призмы является равнобедренная (почему?) трапеция BK_1M_1C. Обозначим $P_1 = A_1E_1 \cap K_1M_1$, где E_1 — середина B_1C_1. Тогда $P_1E \perp BC$, поэтому $\angle AEP_1 = \varphi$. Проведем отрезки K_1K, P_1P, M_1M параллельно AA_1, где $K \in AB$, $P \in AE$, $M \in AC$. Отсюда равнобедренная (почему?) трапеция $BKMC$ — ортогональная проекция сечения BK_1M_1C на плоскость нижнего основания. Значит, $S_{BK_1M_1C} = \frac{S_{BKMC}}{\cos\varphi}$; $S_{BKMC} = \frac{KM + BC}{2} \cdot PE$. Так как $P_1P \| A_1A$, то $P_1P = A_1A = H$. Тогда $\triangle PP_1E (\angle P = 90^\circ)$: $PE = P_1E \cdot \cos\varphi = H \cdot \operatorname{ctg}\varphi$.

$$\triangle ACB\text{: } AP = AE - PE = \frac{a\sqrt{3}}{2} - H \cdot \operatorname{ctg}\varphi = \frac{a\sqrt{3} - 2H\operatorname{ctg}\varphi}{2}.$$

Из параллельности $KM \| K_1M_1$ и $K_1M_1 \| BC$ следует $KM \| BC$, поэтому $\triangle AKM \backsim \triangle ABC$. Следовательно, $KM : BC = AP : AE$; откуда $KM = \frac{BC \cdot AP}{AE} = \frac{a(a\sqrt{3} - 2H\operatorname{ctg}\varphi)}{2 \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2}} = \frac{3a - 2\sqrt{3}H\operatorname{ctg}\varphi}{3}$.

Получаем $S_{BKMC} = \frac{\frac{3a - 2\sqrt{3}H\operatorname{ctg}\varphi}{3} + a}{2} \cdot H\operatorname{ctg}\varphi = \frac{(3a - \sqrt{3}H\operatorname{ctg}\varphi) \cdot H\operatorname{ctg}\varphi}{3}$. Таким образом, $S_{BK_1M_1C} = \frac{(3a - \sqrt{3}H\operatorname{ctg}\varphi) \cdot H\operatorname{ctg}\varphi}{3\cos\varphi} = \frac{H(3a - \sqrt{3}H\operatorname{ctg}\varphi)}{3\sin\varphi}$.

Ответ: $\frac{a^2\sqrt{3}}{4\cos\varphi}$; $\frac{H(3a - \sqrt{3}H\operatorname{ctg}\varphi)}{3\sin\varphi}$.

2.035. ♉ Основанием наклонной призмы $ABCA_1B_1C_1$ является равнобедренный треугольник ABC, в котором $AC = AB = 13$ см, $BC = 10$ см, а боковое ребро призмы образует с плоскостью основания угол в 45°. Проекцией вершины A_1 является точка пересечения медиан треугольника ABC. Найдите площадь грани CC_1B_1B.

2.036. ♉ Каждое ребро треугольной призмы равно a. Зная, что плоские углы одного из трехгранных углов призмы равны между собой, найдите площадь сечения, делящего призму на симметричные части.

2.037. Постройте сечение правильной четырехугольной призмы плоскостью, проходящей через середины двух смежных сторон основания и середину отрезка, соединяющего центры оснований. Найдите площадь этого сечения, если сторона основания призмы равна 2 дм, а высота 4 дм.

2.038. ☺ В правильной треугольной призме, каждое ребро которой равно a, постройте сечение через сторону основания и середину отрезка, соединяющего центры оснований. Найдите площадь сечения и угол между плоскостью сечения и плоскостью основания.

2.039. ☺ В правильной четырехугольной призме боковое ребро равно 7 см, а сторона основания 8 см. Найдите площадь сечения, проведенного через середины двух смежных сторон одного основания и наиболее удаленную от них вершину другого основания.

Задачи к 11.2. Боковая и полная поверхности призмы

2.040. ☺ (*Устно.*) Поверхность куба равна 54 см^2. Найдите ребро.

2.041. ☺ (*Устно.*) В прямой треугольной призме все ребра равны. Боковая поверхность равна 12 см^2. Найдите высоту.

2.042. Основание прямой призмы — равнобедренный треугольник, у которого боковая сторона относится к основанию как 5 : 6. Высота призмы равна высоте основания, опущенной на его боковую сторону; площадь полной поверхности равна 2520 м^2. Найдите ребра призмы.

2.043. ☺ Стороны основания прямой треугольной призмы равны 13 см, 37 см и 40 см, а боковое ребро 20 см. Найдите: а) площади боковой и полной поверхностей призмы; б) площадь сечения призмы плоскостью, проходящей через боковое ребро и меньшую высоту основания призмы; в) площадь сечения призмы плоскостью, проходящей через сторону основания под углом 30° к нему.

2.044. Стороны перпендикулярного сечения наклонной треугольной призмы равны 21 см, 17 см и 10 см; а ее боковое ребро

18 см. Найдите: а) площади боковой и полной поверхностей призмы; б) площадь сечения призмы плоскостью, проходящей через боковое ребро и меньшую высоту перпендикулярного сечения призмы; в) площадь основания призмы, если плоскость сечения образует с плоскостью основания угол в 45°.

2.045. ☺ (*Устно.*) Площадь боковой поверхности правильной четырехугольной призмы равна 32 м^2, а полной поверхности — 40 м^2. Найдите высоту.

2.046. ☺ (*Устно.*) Все ребра прямой треугольной призмы равны, а площадь боковой поверхности равна 48 м^2. Найдите: а) ребро призмы; б) площадь полной поверхности.

2.047. Плоскость проходит через сторону основания правильной треугольной призмы и середину противолежащего ребра и образует с основанием угол в 45°. Сторона основания равна m. Найдите: а) площадь боковой поверхности призмы; б) площадь сечения.

2.048. ☺ Площадь боковой поверхности правильной четырехугольной призмы равна 48 м^2, а площадь полной поверхности — 66 м^2. Найдите: а) сторону основания призмы; б) боковое ребро призмы; в) диагональ призмы; г) площадь диагонального сечения призмы.

2.049. Сторона основания правильной призмы равна a, боковое ребро равно b. Найдите площадь полной поверхности этой призмы, если она: а) треугольная; б) четырехугольная; в) шестиугольная.

2.050. Основанием прямой призмы служит равнобедренная трапеция $ABCD$, у которой $AB = CD = 13$ см, $BC = 11$ см, $AD = 21$ см. Площадь диагонального сечения призмы равна 180 см^2. Найдите: а) площадь полной поверхности призмы; б) площадь сечения AB_1C_1D (рис. 10).

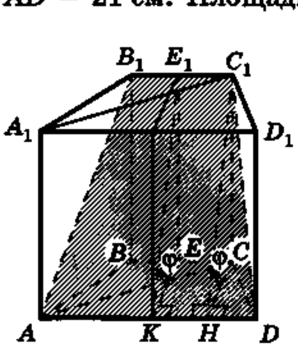


Рис. 10

Решение. а) $S_{\text{полн}} = S_{\text{бок}} + 2S_{\text{осн}}$, $S_{\text{осн}} = \dfrac{BC + AD}{2} \cdot CH$, где CH — высота трапеции $ABCD$ ($CH \| EK$, E и K — середины оснований этой трапеции).

Так как трапеция $ABCD$ равнобедренная, то $DH = \dfrac{AD - BC}{2} = \dfrac{21 - 11}{2} =$

$= 5$. Тогда $\triangle CDH$ ($\angle H = 90°$): $CH = \sqrt{CD^2 - DH^2} = \sqrt{169 - 25} =$ $= 12$. Итак, $S_{осн} = \frac{11 + 21}{2} \cdot 12 = 192$.

Для вычисления $S_{бок}$ найдем:

$$AH = AD - DH = 21 - 5 = 16.$$

$\triangle ACH$ ($\angle H = 90°$): $AC = \sqrt{AH^2 + CH^2} = \sqrt{256 + 144} = 20$.

Поскольку данная призма прямая, то $AA_1 \perp (ABC)$, следовательно, четырехугольник ACC_1A_1 — прямоугольник, а $S_{бок} =$ $= P \cdot CC_1$, где P — периметр основания.

Так как $S_{ACC_1A_1} = 180 = AC \cdot CC_1$, то $CC_1 = \frac{180}{AC} = 9$. Поэтому $S_{бок} = (2AB + AD + BC) \cdot CC_1 = (2 \cdot 13 + 21 + 11) \cdot 9 = 522$. Тогда

$$S_{полн} = S_{бок} + 2S_{осн} = 522 + 2 \cdot 192 = 906 \text{ (см}^2\text{)}.$$

б) Из равенства $\triangle ABB_1 = \triangle DCC_1$ следует $AB_1 = DC_1$. Значит, AB_1C_1D — равнобедренная трапеция. Если E, K, E_1 — середины оснований трапеций $ABCD$ и AB_1C_1D, то $EK \perp AD$, $E_1K \perp AD$ и $\angle EKE_1 = \varphi$ — угол, образованный плоскостью сечения AB_1C_1D и плоскостью основания призмы. Причем трапеция $ABCD$ является ортогональной проекцией трапеции AB_1C_1D. Поэтому $S_{ABCD} = S_{AB_1C_1D} \cdot \cos\varphi$, откуда $S_{AB_1C_1D} = \frac{S_{ABCD}}{\cos\varphi}$. Находим $\cos\varphi$.

$$\triangle EKE_1\colon \operatorname{tg}\varphi = \frac{EE_1}{EK} = \frac{CC_1}{CH} = \frac{3}{4} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \cos\varphi = \sqrt{\frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2\varphi}} = \frac{4}{5}\ \left(0 < \varphi < \frac{\pi}{2}\right).$$

Таким образом, $S_{AB_1C_1D} = 192 : \frac{4}{5} = 240$ (см^2).

Ответ: а) 906 см^2; б) 240 см^2.

2.051. ☺ Высота прямой призмы равна 15, а в ее основании — равнобедренная трапеция с высотой 10 и основаниями 25 и 45. Найдите: а) площадь боковой поверхности призмы; б) площадь диагонального сечения призмы; в) двугранные углы при боковых ребрах призмы.

2.052. Основанием прямой призмы является треугольник со сторонами 3 см и 5 см, образующими угол в 120°. Наибольшая из площадей боковых граней равна 35 см^2. Найдите площади боковой и полной поверхностей призмы.

2.053. В наклонной треугольной призме две боковые грани взаимно перпендикулярны, а их общее ребро, равное 24 см, отстоит от двух других боковых ребер на 12 см и 35 см. Найдите площадь боковой поверхности призмы.

2.054. ☺ Найдите площадь боковой поверхности правильной четырехугольной призмы, диагональ которой равна a и образует: а) с плоскостью основания угол в 60°; б) с плоскостью боковой грани угол в 30°.

2.055. ♉ Сечением наклонной треугольной призмы плоскостью, перпендикулярной боковому ребру, является равнобедренный прямоугольный треугольник, площадь которого Q. Боковое ребро призмы равно a. Найдите площадь боковой поверхности призмы.

2.056. ♉ Диагонали боковых граней прямой треугольной призмы равны 9 см, $10\sqrt{2}$ см и 15 см. Основание призмы — прямоугольный треугольник. Найдите стороны основания и площадь боковой поверхности призмы.

2.057. ☺ Найдите площадь боковой поверхности правильной треугольной призмы, площадь основания которой равна S, а площадь сечения, проведенного через сторону одного основания и противоположную вершину второго основания, равна Q.

2.058. В основании наклонной призмы $ABCA_1B_1C_1$ лежит правильный треугольник ABC, сторона которого равна 4. Боковое ребро AA_1 равно 7 и образует со сторонами AC и AB основания равные углы в 60°. Найдите площадь боковой поверхности призмы.

2.059. ☺ В основании наклонной призмы $ABCA_1B_1C_1$ лежит правильный треугольник ABC, сторона которого равна 6. Вершина A_1 равноудалена от точек A, B, C. Найдите площадь боковой поверхности призмы, если ее боковое ребро равно 5.

Задачи к 11.3. Объем призмы

2.060. ☺ (*Устно.*) По стороне основания a и боковому ребру b найдите объем правильной призмы, если она: а) треугольная; б) четырехугольная; в) шестиугольная.

2.061. Сторона основания правильной треугольной призмы равна a, боковая поверхность равновелика сумме оснований. Найдите объем призмы.

2.062. ☺ В правильной шестиугольной призме большее диагональное сечение равновелико основанию, сторона которого a. Найдите ребро куба, равновеликого этой призме.

2.063. Периметр боковой грани правильной четырехугольной призмы равен 14 см, а периметр сечения призмы, проведенного через противоположные стороны оснований, равен 16 см. Найдите объем призмы.

2.064. ☺ Основанием прямой призмы служит треугольник ABC, угол B которого равен 120°, а угол AB_1C, образованный диагоналями боковых граней, равен 90°. Найдите объем призмы, если: а) $AB = 40$ см, $BC = 60$ см; б) $AB = 4$ см, $B_1C = 4\sqrt{3}$ см; в) $AB + BC = 10$ см, $B_1C = 4\sqrt{3}$ см.

2.065. Основанием прямой призмы служит трапеция $ABCD$ ($AD \parallel BC$), у которой $AB = 26$ см, $BC = 22$ см, $CD = 25$ см, $AD = 39$ см. Площадь сечения AA_1C_1C равна 400 см^2. Найдите объем призмы.

2.066. ☺ Основанием прямой призмы является параллелограмм. Через сторону основания, равную a, и противоположную ей сторону другого основания проведено сечение, составляющее угол β с плоскостью основания. Площадь сечения равна Q. Найдите объем призмы.

2.067. ♉ Найдите объем правильной шестиугольной призмы, площадь боковой поверхности которой равна 324 см^2, а боковое ребро и большая диагональ относятся как 3 : 5.

2.068. ☺ Из всех правильных шестиугольных призм с периметром боковой грани, равным 16 см, найдите объем и площадь боковой поверхности той призмы, которая имеет наименьшую меньшую диагональ.

2.069. Основанием прямой призмы служит равнобедренная трапеция, боковая сторона и диагональ которой взаимно перпендикулярны и равны соответственно 15 см и 20 см. Площадь сечения, проходящего через большую сторону нижнего основания и противоположную ей сторону верхнего основания, равна 320 см^2. Найдите объем призмы.

2.070. Основанием прямой призмы служит равнобедренный треугольник ABC ($AB = BC$), площадь которого равна 48 см^2. Площадь боковой поверхности призмы равна 480 см^2, а площадь сечения AB_1C равна 102 см^2. Найдите объем призмы.

2.071. ☺ Постройте сечение треугольной призмы плоскостью, проходящей через боковое ребро и разбивающей ее на две равновеликие призмы.

2.072. Постройте сечение наклонного параллелепипеда плоскостью, проходящей через данную точку, которая принадлежит ребру параллелепипеда и делит его: а) на две равновеликие призмы; б) на два равновеликих многогранника.

2.073. ♉ Основание призмы — треугольник, у которого одна сторона равна 2 см, а две другие по 3 см. Боковое ребро призмы равно 4 см и составляет с плоскостью основания угол в 45°. Найдите длину ребра куба, равновеликого этой призме.

2.074. ☺ Стороны основания наклонной треугольной призмы равны 1,7 дм, 2,8 дм и 3,9 дм. Одна из вершин верхнего основания удалена от каждой стороны нижнего основания на 1,3 дм. Найдите объем призмы.

2.075. ♉ Основанием наклонной призмы $ABCA_1B_1C_1$ служит треугольник ABC, периметр которого равен 5,6 дм, а $\angle ACB = 60°$. Ребро CC_1 призмы равно 0,6 дм и образует с каждой из сторон AC и BC основания углы в 60°, при этом диагональ AC_1 боковой грани призмы равна 1,4 дм. Найдите объем призмы.

2.076. ♉ Вершина A_1 призмы $ABCA_1B_1C_1$ проектируется в центр ее нижнего основания ABC, а ребро AA_1 составляет со стороной AB основания угол в 45°. Найдите объем и площадь боковой поверхности призмы, если треугольник ABC — правильный со стороной a.

2.077. ♉ Основанием наклонной призмы служит правильный треугольник со стороной a. Одна из боковых граней призмы перпендикулярна плоскости ее основания и представляет собой ромб, у которого меньшая диагональ равна c. Найдите объем призмы.

2.078. ♉ Основание прямой призмы — ромб с острым углом α. Меньшая диагональ призмы равна d и составляет с плоскостью основания угол β. Найдите объем призмы.

Задачи к § 12. Параллелепипед

Свойства параллелепипеда

2.079. Найдите плоскости симметрии: а) прямого параллелепипеда; б) прямоугольного параллелепипеда; в) куба.

2.080. Найдите оси симметрии: а) прямого параллелепипеда; б) прямоугольного параллелепипеда; в) куба.

2.081. Найдите все вращения, отображающие на себя: а) прямой параллелепипед; б) прямоугольный параллелепипед; в) куб.

2.082. ☺ Рассматривается треугольник, вершинами которого являются концы трех ребер параллелепипеда, выходящих из одной его вершины. Докажите, что центроид этого треугольника принадлежит диагонали параллелепипеда, выходящей из той же вершины, и делит эту диагональ в отношении $1 : 2$, считая от общей вершины.

2.083. ☺ В прямом параллелепипеде стороны основания равны 2 см и 5 см; расстояние между меньшими из них 4 см; боковое ребро равно $2\sqrt{2}$ см. Найдите диагонали параллелепипеда.

2.084. (*Устно.*) В прямоугольном параллелепипеде стороны основания равны 7 дм и 24 дм, а высота параллелепипеда 8 дм. Найдите площадь диагонального сечения.

2.085. ☺ (*Устно.*) Боковое ребро прямого параллелепипеда равно 5 м, стороны основания 6 м и 8 м, а одна из диагоналей основания 12 м. Найдите диагонали параллелепипеда.

2.086. ☺ В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ $AB = 2$, $AD = 1$ и $AC_1 = 3$. Найдите расстояние между прямыми AB и B_1C_1.

2.087. ☺ В прямом параллелепипеде стороны основания 3 см и 5 см, одна из диагоналей основания 4 см. Меньшая диагональ параллелепипеда составляет с плоскостью основания угол в 60°. Найдите диагонали параллелепипеда.

2.088. Найдите диагонали прямого параллелепипеда, у которого каждое ребро равно a, а угол основания равен 60°.

2.089. ☺ В прямом параллелепипеде боковое ребро равно 1 м, стороны основания 23 дм и 11 дм, а диагонали основания относятся как $2 : 3$. Найдите площади диагональных сечений.

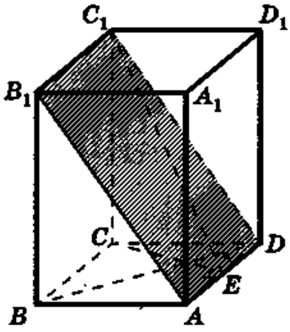


Рис. 11

2.090. В прямом параллелепипеде с основанием $ABCD$ $AB = 29$ см, $AD = 36$ см, $BD = 25$ см, $AA_1 = 48$ см. Найдите площадь сечения AB_1C_1D.

Дано: $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — прямой параллелепипед (рис. 11); $AB = 29$ м, $AD = 36$ см, $BD = 25$ см, $AA_1 = 48$ см.

Найти $S_{AB_1C_1D}$.

Решение. Имеем $29^2 + 36^2 \neq 25^2 \Rightarrow AB^2 + AD^2 \neq BD^2 \Rightarrow \triangle ABD$ — не прямоугольный $\Rightarrow ABCD$ — параллелограмм, но не прямоугольник.

Это означает, что сечение AB_1C_1D — параллелограмм (докажите почему). Пусть C_1E — высота этого параллелограмма, тогда (по теореме о трех перпендикулярах) CE — высота основания $ABCD$. Поэтому

$$S_{AB_1C_1D} = AD \cdot C_1E, \qquad (1)$$

$$\triangle CC_1E\ (\angle C = 90^\circ):\ C_1E = \sqrt{CC_1^2 + CE^2}, \qquad (2)$$

$$CE = \frac{S_{ABCD}}{AD} = \frac{2S_{\triangle ABD}}{AD}. \qquad (3)$$

Таким образом, находим: $S_{ABCD} = 2S_{\triangle ABD} = 2\sqrt{45 \cdot (45-25) \cdot (45-29) \cdot (45-36)} = 720$. Тогда из (3), (2) и (1) последовательно получаем $CE = \frac{720}{36} = 20$; $C_1E = \sqrt{48^2 + 20^2} = 52$; $S_{AB_1C_1D} = 36 \cdot 52 = 1872$ (см^2).

Ответ: 1872 см^2.

2.091. ☺ $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — куб с ребром 6. Точка K — середина ребра AA_1, точка M — середина ребра DC; P — точка на ребре AD. Найдите длину отрезка AP, если прямые B_1K и MP пересекаются.

2.092. Найдите расстояние между диагональю AC_1 куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ и прямой BD, если длина ребра куба равна $\sqrt{6}$.

2.093. ☺ В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ известны координаты некоторых вершин: $A_1(0;\ 0;\ 2)$, $D_1(3;\ 0;\ 2)$, $B_1(0;\ 3;\ 2)$. Найдите координаты остальных вершин куба, если аппликата вершины A отрицательна.

2.094. Ребро куба равно a. Найдите расстояние между непересекающимися диагоналями двух смежных граней куба.

2.095. ☺ Основанием параллелепипеда служит квадрат со стороной a, а его боковое ребро равно l. Одна из вершин основания параллелепипеда равноудалена от всех вершин другого основания. Найдите площади диагональных сечений параллелепипеда.

2.096. ☺ Стороны основания прямого параллелепипеда равны 7 и 17, а его диагонали образуют с плоскостью основания углы в 45° и 30°. Найдите высоту параллелепипеда.

2.097. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — прямой параллелепипед, в основании которого параллелограмм $ABCD$. Меньшая сторона основания равна $5\sqrt{2}$, острый угол равен 45°. Меньшая диагональ основания образует угол в 30° с большей его стороной. Меньшая диагональ параллелепипеда образует с боковым ребром угол в 30°. Найдите: а) площади диагональных сечений параллелепипеда; б) площади сечений параллелепипеда, проходящих через противолежащие стороны его оснований.

2.098. Основанием наклонного параллелепипеда служит ромб $ABCD$, в котором $\angle BAD = 60°$; боковые ребра наклонены к плоскости основания под углом в 60°, а плоскость AA_1C_1C перпендикулярна плоскости основания. Докажите, что площади сечений AA_1C_1C и BB_1D_1D относятся как 3 : 2.

2.099. ☺ Диагональ AC_1 прямоугольного параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ равна 1 и образует с плоскостями ABB_1 и ADD_1 углы α и β. Найдите угол, который она образует с плоскостью ABC.

2.100. Три ребра прямоугольного параллелепипеда, имеющие общую вершину, «видны» из точки пересечения его диагоналей под углами α, β и γ. Докажите, что $\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma = 1$.

Дано: $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — прямоугольный параллелепипед (рис. 12); $O = A_1C \cap BD_1$; $\angle AOB = \alpha$; $\angle BOC = \beta$; $\angle B_1OB = \gamma$.

Доказать: $\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma = 1$.

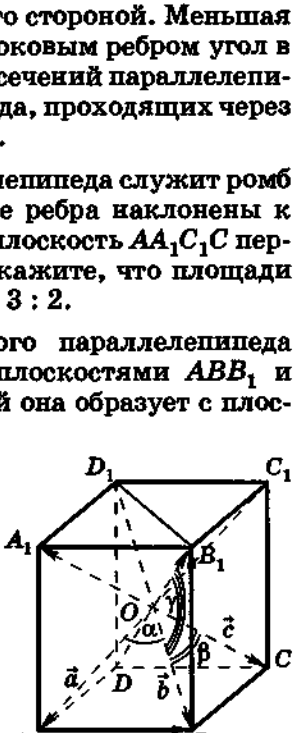


Рис. 12

Решение. Введем три некомпланарных вектора: $\vec{a} = \overrightarrow{OA}$, $\vec{b} = \overrightarrow{OB}$, $\vec{c} = \overrightarrow{OC}$. Так как все диагонали прямоугольного параллелепипеда равны между собой, пересекаются в одной точке и делятся этой точкой пополам, то $|\vec{a}| = |\vec{b}| = |\vec{c}| = p$. Тогда

$$\cos\alpha = \cos\angle(\overrightarrow{OA};\ \overrightarrow{OB}) = \cos\angle(\vec{a};\vec{b}) = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|} = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{p^2};$$

$$\cos\beta = \cos\angle(\overrightarrow{OB};\ \overrightarrow{OC}) = \cos\angle(\vec{b};\vec{c}) = \frac{\vec{b}\cdot\vec{c}}{|\vec{b}|\cdot|\vec{c}|} = \frac{\vec{b}\cdot\vec{c}}{p^2};$$

$$\cos\gamma = \cos\angle(\overrightarrow{OB};\ \overrightarrow{OB_1}) = \cos\angle(\vec{b};\ \overrightarrow{OB_1}) = \frac{\vec{b}\cdot\overrightarrow{OB}}{|\vec{b}|\cdot\left|\overrightarrow{OB_1}\right|} = \frac{\vec{b}\cdot\overrightarrow{OB_1}}{p^2}.$$

Имеем $\triangle OA_1B_1$: $\overrightarrow{OB_1} = \overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{A_1B_1}$.

Но $\overrightarrow{OA_1} = -\overrightarrow{OC} = -\vec{c}$, $\overrightarrow{A_1B_1} = \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = \vec{b} - \vec{a}$.

Поэтому $\overrightarrow{OB_1} = -\vec{a} + \vec{b} - \vec{c}$. Значит, $\vec{b}\cdot\overrightarrow{OB_1} = \vec{b}\cdot(-\vec{a} + \vec{b} - \vec{c})$.

Тогда $\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma = \dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{p^2} + \dfrac{\vec{b}\cdot\vec{c}}{p^2} + \dfrac{\vec{b}\cdot(-\vec{a} + \vec{b} - \vec{c})}{p^2} =$
$= \dfrac{\vec{b}\cdot(\vec{a} + \vec{c} - \vec{a} + \vec{b} - \vec{c})}{p^2} = \dfrac{\vec{b}\cdot\vec{b}}{p^2} = \dfrac{p^2}{p^2} = 1$, что и требовалось доказать.

2.101. ♉ Из вершины параллелепипеда проведены три диагонали его граней. На этих отрезках, как на ребрах, построен параллелепипед. Докажите, что противолежащая вершина данного параллелепипеда служит центром симметрии построенного.

2.102. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — параллелепипед. Точки M, P, K — середины ребер соответственно A_1D_1, C_1C и AB. Докажите, что центр симметрии параллелепипеда лежит в плоскости MPK.

Площадь поверхности параллелепипеда

2.103. ☺ Четыре грани наклонного параллелепипеда — квадраты со стороной 2. Боковое ребро наклонено к плоскости основания под углом 30°. Найдите площадь полной поверхности параллелепипеда.

2.104. ☺ (*Устно.*) В прямом параллелепипеде стороны основания равны 6 м и 8 м и образуют угол в 30°, боковое ребро — 5 м. Найдите площадь полной поверхности параллелепипеда.

2.105. В прямом параллелепипеде стороны основания равны 10 см и 17 см, одна из диагоналей равна 21 см, большая диагональ параллелепипеда равна 29 см. Найдите площадь полной поверхности параллелепипеда.

2.106. Стороны основания прямого параллелепипеда равны 8 см и 15 см и образуют угол в 60°. Меньшая из площадей диагональных сечений равна 130 см². Найдите: а) площадь второго диагонального сечения; б) площадь боковой поверхности параллелепипеда; в) площадь полной поверхности параллелепипеда; г) площади сечений параллелепипеда, проходящих через противолежащие стороны его верхнего и нижнего оснований.

Дано: $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — прямой параллелепипед (рис. 13), $AD = 8$ см, $AB = 15$ см, $\angle BAD = 60°$; $S_{BDD_1B_1} = 130$ см².

Найти: а) $S_{ACC_1A_1}$; б) $S_{бок}$; в) $S_{полн}$; г) $S_{ABC_1D_1}$; $S_{BCD_1A_1}$.

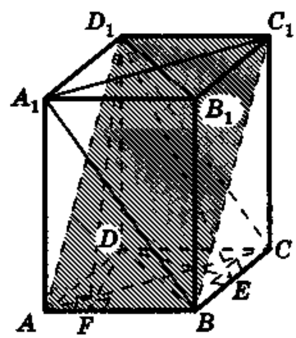


Рис. 13

Решение. $\angle BAD = 60°$, значит, в параллелограмме $ABCD$ диагонали AC и BD связаны неравенством $BD < AC$. Поэтому $S_{BDD_1B_1} = 130$, и требуется найти $S_{ACC_1A_1}$. Так как ACC_1A_1 — прямоугольник (почему?), то $S_{ACC_1A_1} = AC \cdot AA_1$. Найдем длины отрезков AC и AA_1.

$$\triangle ABD\colon BD^2 = AB^2 + AD^2 - 2AB \cdot AD \cdot \cos A = 225 + 64 - 2 \cdot 15 \cdot 8 \cdot \cos 60° = 169 \Rightarrow BD = 13.$$

$$\triangle ABC\colon AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2AB \cdot BC \cdot \cos B = 225 + 64 - 2 \cdot 15 \cdot 8 \cdot \cos 120° = 409 \Rightarrow AC = \sqrt{409}.$$

Далее,
$S_{BDD_1B_1} = BD \cdot BB_1 = 130 \Rightarrow BB_1 = 130 : BD = 130 : 13 = 10.$
Тогда:
а) $S_{ACC_1A_1} = AC \cdot AA_1 = 10\sqrt{409}$;

б) $S_{бок} = 2(AB + BC) \cdot AA_1 = 460$;

в) $S_{полн} = S_{бок} + 2S_{осн}$; $S_{осн} = AB \cdot AD \cdot \sin 60° = 60\sqrt{3}$.

Таким образом, $S_{полн} = 460 + 2 \cdot 60\sqrt{3} = 20 \cdot (23 + 6\sqrt{3})$;

г) сечение ABC_1D_1 — параллелограмм (теорема 58). Пусть D_1F — высота этого параллелограмма. Тогда $S_{ABC_1D_1} = AB \cdot D_1F$. Найдем длину D_1F.

Имеем

$D_1F \perp AB, D_1D \perp (ABC) \Rightarrow DF \perp AB$ (по теореме о трех перпендикулярах).

Поэтому $DF = AD \cdot \sin 60° = 4\sqrt{3}$,

$\triangle DD_1F$ $(\angle D = 90°)$: $D_1F = \sqrt{DD_1^2 + DF^2} = \sqrt{100 + 48} = 2\sqrt{37}$.

Тогда

$$S_{ABC_1D_1} = 15 \cdot 2\sqrt{37} = 30\sqrt{37}.$$

Аналогично, сечение BCD_1A_1 — параллелограмм. Если D_1E — высота этого параллелограмма, то $DE \perp BC$. Поэтому $\angle DED_1 = \varphi$ — угол между плоскостью сечения BCD_1A_1 и плоскостью основания $ABCD$. Так как основание $ABCD$ является ортогональной проекцией сечения BCD_1A_1, то площадь сечения $S_{BCD_1A_1} = S_{осн} : \cos\varphi$. Найдем $\cos\varphi$.

$$\triangle DEC\text{: } DE = DC \cdot \sin 60° = \frac{15\sqrt{3}}{2}.$$

$$\triangle DED_1\text{: } \operatorname{tg}\varphi = \frac{DD_1}{DE} = 10 : \frac{15\sqrt{3}}{2} = \frac{4\sqrt{3}}{9} \Rightarrow \cos\varphi = \frac{3\sqrt{3}}{\sqrt{43}}.$$

Откуда $S_{BCD_1A_1} = 60\sqrt{3} : \dfrac{3\sqrt{3}}{\sqrt{43}} = 20\sqrt{43}$.

Ответ: а) $10\sqrt{409}$ см²; б) 460 см²; в) $20 \cdot (23 + 6\sqrt{3})$ см²; г) $30\sqrt{37}$ см²; $40\sqrt{43}$ см².

2.107. ☺ В прямоугольном параллелепипеде его диагональ образует с плоскостью основания угол в 45°, а стороны основания равны 5 см и 12 см. Найдите: а) боковое ребро параллелепипеда; б) площадь боковой поверхности параллелепипеда; в) площадь полной поверхности параллелепипеда.

2.108. Диагональ прямоугольного параллелепипеда равна d и образует с меньшей боковой гранью угол α, а с плоскостью основания — угол φ. Найдите площадь боковой поверхности параллелепипеда.

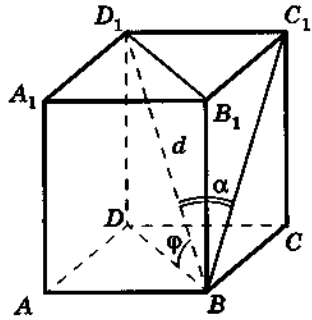


Рис. 14

Дано: $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — прямоугольный параллелепипед; $BD_1 = d$; $\angle DBD_1 = \varphi$; $\angle D_1BC_1 = \alpha$ (рис. 14). Найти $S_{бок}$.

Решение. $S_{бок} = 2 \cdot (S_{ABB_1A_1} + S_{BCC_1B_1})$.

Так как все боковые грани прямоугольного параллелепипеда — прямоугольники, то $S_{ABB_1A_1} = AB \cdot BB_1$, $S_{BCC_1B_1} = BC \cdot BB_1$.

Найдем стороны основания и боковое ребро параллелепипеда. Вследствие того, что $DD_1 \perp (ABC)$ и $D_1C_1 \perp (BCC_1)$, имеем:

$$\triangle BDD_1\ (\angle BDD_1 = 90°): BD = d \cdot \cos\varphi,\ DD_1 = d \cdot \sin\varphi;$$

$$\triangle BC_1D_1\ (\angle BC_1D_1 = 90°): BC_1 = d \cdot \cos\alpha,\ C_1D_1 = d \cdot \sin\alpha.$$

Тогда

$$\triangle BCD\ (\angle BCD = 90°): BC^2 = BD^2 - CD^2 =$$
$$= d^2\cos^2\varphi - d^2 \cdot \sin^2\alpha \Rightarrow BC = d\sqrt{\cos^2\varphi - \sin^2\alpha}.$$

Так как $AB = C_1D_1$, $BB_1 = DD_1$, то $S_{ABB_1A_1} = d \cdot \sin\alpha \times \times d \cdot \sin\varphi = d^2 \cdot \sin\alpha \cdot \sin\varphi$;

$$S_{BCC_1B_1} = d\sqrt{\cos^2\varphi - \sin^2\alpha} \cdot d \cdot \sin\varphi =$$
$$= d^2 \sin\varphi\sqrt{\cos^2\varphi - \sin^2\alpha}.$$

Преобразуем $\cos^2\varphi - \sin^2\alpha = \dfrac{1 + \cos 2\varphi}{2} - \dfrac{1 - \cos 2\alpha}{2} = \dfrac{\cos 2\varphi + \cos 2\alpha}{2} = \cos(\varphi + \alpha)\cos(\varphi - \alpha)$.

Тогда $S_{бок} = 2 \cdot (S_{ABB_1A_1} + S_{BCC_1B_1}) =$

$= 2 \cdot (d^2 \cdot \sin\alpha \cdot \sin\varphi + d^2 \cdot \sin\varphi \cdot \sqrt{\cos(\varphi + \alpha) \cdot \cos(\varphi - \alpha)}) =$

$= 2d^2 \cdot \sin\varphi\,(\sin\alpha + \sqrt{\cos(\varphi + \alpha) \cdot \cos(\varphi - \alpha)})$.

Ответ: $2d^2 \cdot \sin\varphi\,(\sin\alpha + \sqrt{\cos(\varphi + \alpha) \cdot \cos(\varphi - \alpha)})$.

2.109. Высота прямого параллелепипеда равна $\sqrt{3}$, диагонали его составляют с основанием углы 45° и 60°, а основанием служит ромб. Найдите: а) площадь боковой поверхности параллелепипеда; б) площадь полной поверхности параллелепипеда; в) площадь сечения, проходящего через противолежащие стороны его оснований.

2.110. ☺ В прямом параллелепипеде боковое ребро равно 12 см, большая сторона основания 7 см, большая диагональ основания 9 см. Найдите площадь боковой поверхности параллелепипеда, если его большая диагональ образует с большей стороной основания угол 60°.

2.111. Диагонали прямого параллелепипеда равны 13 см и 15 см, а стороны основания 7 см и 12 см. Найдите площадь боковой поверхности.

2.112. ☺ Одна из диагоналей основания прямого параллелепипеда равна $12\sqrt{2}$ и образует со стороной основания угол в 45°. Найдите площадь боковой поверхности параллелепипеда, если большая диагональ параллелепипеда равна 38, а площадь его основания равна 84.

2.113. Площадь боковой поверхности прямого параллелепипеда равна 672 см^2, а полной — 896 см^2. Меньшая из диагоналей основания равна $8\sqrt{2}$ см и образует с большей стороной основания угол в 45°. Найдите меньшую диагональ основания.

2.114. Найдите площадь полной поверхности прямоугольного параллелепипеда, диагональ которого равна 25 см, а диагонали боковых граней 15 см и $4\sqrt{34}$ см.

2.115. Основанием прямого параллелепипеда служит параллелограмм, меньшая сторона которого равна 9 см, а острый угол равен 60°. Большая из диагоналей параллелепипеда равна 29 см, а диагональ его большей боковой грани равна 25 см. Найдите площадь боковой поверхности параллелепипеда.

2.116. ☺ Диагонали прямого параллелепипеда равны 16 см и 30 см, а угол, образованный ими, заключающий меньшую сторону основания, равен 60°. Боковое ребро параллелепипеда меньше большей стороны основания на 17 см. Найдите площадь боковой поверхности.

2.117. ♉ Диагонали смежных боковых граней прямого параллелепипеда равны 10 см и 17 см; вершина одного из тупых углов верхнего основания удалена от противолежащих сторон нижнего основания на $2\sqrt{21}$ см и $3\sqrt{21}$ см. Найдите площадь боковой поверхности параллелепипеда.

2.118. ☺ (*Устно.*) Основанием прямого параллелепипеда служит ромб с диагоналями 6 см и 8 см; диагональ боковой грани равна 13 см. Найдите площадь полной поверхности параллелепипеда.

2.119. ☺ Основанием параллелепипеда служит ромб со стороной b и острым углом α, а боковые грани — параллелограммы с острым углом β. Боковое ребро параллелепипеда равно a. Найдите: а) площадь боковой поверхности параллелепипеда; б) площадь меньшего диагонального сечения; в) высоту параллелепипеда.

2.120. Диагональ основания прямоугольного параллелепипеда равна l и образует угол φ с одной из сторон основания. Угол между этой стороной и диагональю параллелепипеда равен θ. Найдите площадь боковой поверхности параллелепипеда.

2.121. Стороны основания прямого параллелепипеда равны 13 см и 14 см, меньшая его диагональ равна 17 см, а площадь основания равна 168 см^2. Найдите площадь боковой поверхности.

2.122. ♉ Стороны основания прямого параллелепипеда относятся как $2:7$; большая из диагоналей основания равна $10\sqrt{3}$ см и образует с меньшей стороной основания угол в $30°$. Найдите меньшую диагональ параллелепипеда, если площадь его боковой поверхности равна 1080 см^2.

2.123. Основанием параллелепипеда с боковым ребром b является квадрат со стороной a. Одна из вершин верхнего основания равноудалена от всех вершин нижнего основания. Найдите площадь полной поверхности параллелепипеда.

2.124. ♉ Докажите, что сумма квадратов площадей боковых граней прямого параллелепипеда равна сумме квадратов площадей его диагональных сечений.

2.125. ☺ Найдите площадь боковой поверхности и площади диагональных сечений прямого параллелепипеда, диагонали которого равны 15 см и $\sqrt{313}$ см, а диагонали его боковых граней равны 13 см и $2\sqrt{61}$ см.

2.126. Параллелограмм $ABCD$ является основанием наклонного параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$, у которого $AD = 15$, $BD = 7$, $\angle ADB = 60°$, $\angle A_1AB = \angle A_1AD$. Диагональ A_1D грани ADD_1A_1 составляет с плоскостью основания угол в 45°, а вершина A_1 ортогонально проектируется на диагональ BD основания. Найдите площадь боковой поверхности параллелепипеда.

2.127. Все боковые ребра параллелепипеда равны b. В основании параллелепипеда квадрат. Одна из вершин верхнего основания одинаково удалена от всех вершин нижнего основания. Найдите площадь поверхности параллелепипеда.

2.128. ♉ $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — прямой параллелепипед, в основании которого параллелограмм $ABCD$ с острым углом в 60°. Меньшая сторона основания равна 4 и образует с меньшей его диагональю угол в 90°. Меньшая диагональ параллелепипеда равна $2\sqrt{21}$. Найдите: а) площадь боковой поверхности параллелепипеда; б) площадь сечения, проходящего через большие стороны нижнего и верхнего оснований.

2.129. ♉ $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — прямой параллелепипед, в основании которого параллелограмм с острым углом в 45° и меньшей диагональю 10 см, которая образует с большей стороной основания угол в 30°. Меньшая диагональ параллелепипеда образует с плоскостью основания угол в 60°. Найдите: а) площади диагональных сечений параллелепипеда; б) площади боковой и полной поверхностей; в) площади сечений параллелепипеда, проходящих через противолежащие стороны его оснований.

Объем параллелепипеда

2.130. ☺ (*Устно.*) Объем куба равен 8 дм³. Найдите площадь его поверхности.

2.131. (*Устно.*) Три алюминиевых куба с ребрами 3 см, 4 см и 5 см переплавили в один куб. Найдите ребро этого куба.

2.132. ☺ (*Устно.*) Единичный куб пересечен плоскостью, проходящей через его центр. Чему равен объем каждой части куба?

2.133. ☺ (*Устно.*) Во сколько раз нужно увеличить каждое из трех измерений прямоугольного параллелепипеда, чтобы его объем увеличился: а) вдвое; б) втрое; в) в n раз?

2.134. ☺ Диагональ прямоугольного параллелепипеда равна 35 см, а ребра относятся как 2 : 3 : 6. Найдите его объем.

2.135. Боковое ребро параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ равно 8 м, диагональ AC основания — 5 м, а диагональ B_1D_1 другого основания — 3 м. Найдите объем параллелепипеда, если отрезки AA_1 и CC_1 симметричны относительно плоскости BB_1D.

2.136. ☺ Диагонали трех неравных граней прямоугольного параллелепипеда равны соответственно 5, 4 и $\sqrt{23}$. Найдите объем параллелепипеда.

2.137. ♉ Диагонали A_1C_1 и BD граней параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ равны соответственно 8 и 4. Угол между скрещивающимися прямыми, содержащими диагонали A_1C_1 и BD, равен 30°, а расстояние между этими прямыми равно 6. Найдите объем параллелепипеда.

2.138. ♉ Стороны основания $ABCD$ прямоугольного параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ относятся как 3 : 4, а периметр диагонального сечения AA_1CC_1 равен 10 см. Какой наибольший объем может иметь этот параллелепипед?

2.139. Диагонали боковых граней прямоугольного параллелепипеда наклонены к плоскости его основания под углами 30° и 60°, а диагональ основания равна $\sqrt{30}$ см. Найдите его объем.

2.140. Найдите объем прямоугольного параллелепипеда, если площади трех его граней равны: а) 2 м^2, 5 м^2, 10 м^2; б) Q_1, Q_2, Q_3.

2.141. Диагональ прямоугольного параллелепипеда равна l и составляет с одной гранью угол в 30°, а с другой — в 45°. Найдите его объем.

2.142. ☺ Найдите объем прямоугольного параллелепипеда, диагональ которого равна 14 см, периметр основания — 20 см и периметр меньшей боковой грани — 32 см.

2.143. ☺ В прямоугольном параллелепипеде диагонали боковых граней, выходящие из одной вершины, равны 4 и 5 и образуют угол в 60°. Найдите объем параллелепипеда.

2.144. ♉ Найдите объем прямоугольного параллелепипеда, диагональ которого равна m и составляет с боковой гранью угол β, а с плоскостью основания угол α.

2.145. Измерения прямоугольного параллелепипеда равны 2 см, 3 см и 6 см. Найдите ребро такого куба, чтобы объемы этих тел относились, как площади их поверхностей.

2.146. В прямоугольном параллелепипеде диагонали трех граней, выходящих из одной вершины, равны 7 см, 8 см и 9 см. Найдите объем параллелепипеда.

2.147. ☺ Из множества прямоугольных параллелепипедов, периметры двух боковых граней которых равны 16 см и 24 см, найдите объем параллелепипеда, имеющего наибольшую боковую поверхность.

2.148. ♉ Из множества прямоугольных параллелепипедов, периметр основания которых равен 24 см, а периметр одной из боковых граней — 36 см, найдите объем параллелепипеда, имеющего наименьшую диагональ.

2.149. Найдите диагональ прямоугольного параллелепипеда, если периметр его основания равен 16 см, площадь полной поверхности — 168 см^2 и объем — 108 см^3.

2.150. ♉ Диагональ прямоугольного параллелепипеда составляет с плоскостью основания угол α, а с боковой гранью угол β. Высота параллелепипеда равна H. Найдите объем параллелепипеда.

2.151. ☺ Диагональ прямоугольного параллелепипеда образует с меньшей боковой гранью угол β. Через большие стороны оснований проведено сечение параллелепипеда. Зная, что периметр этого сечения равен p, а его плоскость образует с плоскостью основания угол α, найдите объем параллелепипеда.

2.152. В прямом параллелепипеде стороны основания a и b образуют угол в 30°, площадь боковой поверхности равна Q. Найдите его объем.

2.153. Основание параллелепипеда — ромб, у которого сторона и меньшая диагональ равны 6, большая диагональ параллелепипеда образует с плоскостью основания угол в 60°. Найдите объем параллелепипеда.

2.154. Основанием прямого параллелепипеда служит параллелограмм, стороны которого 9 и 10, а диагональ 17. Найдите объем параллелепипеда, если площадь его полной поверхности равна 334.

2.155. В прямом параллелепипеде стороны основания 8 и 15 и образуют угол в 60°; меньшая диагональ параллелепипеда составляет с плоскостью основания угол в 30°. Найдите объем параллелепипеда.

2.156. Основание прямого параллелепипеда — ромб. Найдите объем параллелепипеда, если: а) площадь ромба равна 1 м^2, а площади диагональных сечений 3 м^2 и 6 м^2; б) площадь ромба Q, а площади диагональных сечений Q_1 и Q_2.

2.157. Основанием прямого параллелепипеда служит параллелограмм, стороны которого равны 6 см и 10 см, а меньшая диагональ его перпендикулярна меньшей стороне. Большая диагональ параллелепипеда равна 17 см. Найдите объем и площадь полной поверхности.

2.158. ♉ Основанием прямого параллелепипеда является параллелограмм $ABCD$, периметр которого и меньшая диагональ BD равны соответственно 134 см и 41 см. Найдите объем параллелепипеда, если площадь боковой поверхности равна 2680 см^2, а периметр сечения AB_1C_1D равен 154 см.

2.159. ☺ (*Устно.*) В наклонном параллелепипеде стороны перпендикулярного сечения, равные 3 и 4, образуют угол в 30°; боковое ребро равно 10. Найдите объем параллелепипеда.

2.160. ☺ Основанием наклонного параллелепипеда служит параллелограмм $ABCD$, в котором $AB = 3$ дм, $AD = 7$ дм, $BD = 6$ дм. Диагональное сечение AA_1C_1C перпендикулярно к плоскости основания, его площадь равна 1 м^2. Определите объем параллелепипеда.

2.161. Основанием наклонного параллелепипеда служит квадрат со стороной 1 м. Одио из боковых ребер равно 2 м и образует с каждой прилежащей стороной основания угол в 60°. Найдите объем параллелепипеда.

2.162. ☺ В наклонном параллелепипеде основание — ромб со стороной a и острым углом в 60°, боковые грани — ромбы с острым углом в 45°. Найдите его объем.

2.163. ♉ В параллелепипеде длины трех ребер, исходящих из одной вершины, равны a, b, c. Ребра a и b взаимно перпендикулярны, а ребро c образует с каждым из них угол α. Найдите объем параллелепипеда.

2.164. Грани параллелепипеда — равные ромбы со стороной a и острым углом в $60°$, расположенные так, что три острых плоских угла трех граней имеют общую вершину.

Найдите объем параллелепипеда.

Дано: $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — параллелепипед, все грани которого — равные ромбы; $AB = a$, $\angle A_1AB = \angle A_1AD = \angle BAD = 60°$ (рис. 15). Найти объем параллелепипеда.

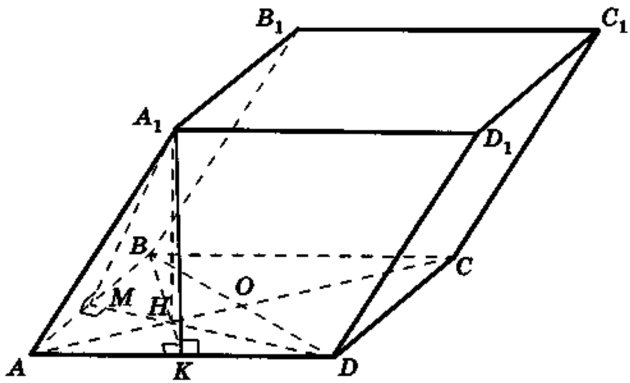


Рис. 15

Решение. Объем V данного параллелепипеда найдем по формуле: $V = S_{осн} \cdot h = S_{ABCD} \cdot A_1H$, где A_1H — высота параллелепипеда.

Прежде всего, докажем, что основание H высоты A_1H параллелепипеда лежит на диагонали AC ромба $ABCD$.

В самом деле, так как все грани параллелепипеда — равные ромбы, то высоты всех граней равны. Пусть A_1K и A_1M — высоты граней AA_1D_1D и AA_1B_1B (см. рис. 15), где K — середина AD, M — середина AB (докажите почему). Так как A_1H — перпендикуляр к плоскости основания параллелепипеда, то по теореме о трех перпендикулярах $HK \perp AD$, $HM \perp AB$. При этом $HK = HM$ (как проекции равных наклонных), т. е. точка H равноудалена от сторон угла BAD, значит, H принадлежит диагонали AC ромба $ABCD$, которая является биссектрисой угла BAD. Более того, так как K — середина AD и M — середина AB, то в точке H пересекаются медианы BK, DM и AO треугольника ABD.

Из сказанного следует важный вывод: изображение заданного параллелепипеда следует начинать с построения нижнего основания $ABCD$ и точки $H = AC \cap BK$ (где K — середина AD); вершина A_1 выбирается на перпендикуляре, проведенном через точку H к плоскости основания.

Теперь нетрудно найти длину высоты A_1H.

В правильном $\triangle ABD$: $AH = \frac{2}{3}AO = \frac{a\sqrt{3}}{3}$. В прямоугольном $\triangle AA_1H$: $A_1H = \sqrt{A_1A^2 - AH^2} = \sqrt{a^2 - \frac{a^2}{3}} = \frac{a\sqrt{6}}{3}$. А так как $S_{ABCD} = AB^2 \cdot \sin 60° = \frac{a^2\sqrt{3}}{2}$, то $V = \frac{a^2\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{a\sqrt{6}}{3} = \frac{a^3\sqrt{2}}{2}$.

Ответ: $\frac{a^3\sqrt{2}}{2}$.

2.165. ☋ Основанием наклонного параллелепипеда служит прямоугольник со сторонами a и b; боковое ребро c образует со сторонами основания углы в 60°. Найдите площадь боковой поверхности, объем параллелепипеда и угол наклона бокового ребра к плоскости основания.

2.166. Найдите стороны основания прямого параллелепипеда, объем которого равен 3360 см^3, площади полной и боковой поверхностей равны соответственно 1416 см^2 и 1080 см^2, а большая диагональ параллелепипеда — 29 см.

2.167. ☺ Диагональ прямоугольного параллелепипеда равна 3 см, а его измерения (длина, ширина и высота) относятся как 1 : 2 : 2. Найдите объем и полную поверхность параллелепипеда.

2.168. Через середину диагонали AC_1 параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ и точки K и M на ребрах AB и DD_1 проведено сечение, разбившее куб на два многогранника. Объем того многогранника, который содержит вершину A, равен V. Найдите объем параллелепипеда.

2.169. Если каждое ребро куба увеличить на 1 м, то его объем увеличится в 125 раз. Найдите длину ребра такого куба, выраженную в сантиметрах.

2.170. ☺ Докажите, что объем параллелепипеда может быть вычислен по формуле $V = \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot d_1 \cdot d_2 \cdot \sin \varphi$, где d_1 и d_2 — длины диагоналей основания, φ — угол между этими диагоналями, ρ — расстояние между плоскостями оснований параллелепипеда.

Задачи к § 13. Трехгранные и многогранные углы

2.171. ☺ Два плоских угла трехгранного угла равны 50° и 85°. В каких пределах может изменяться третий плоский угол?

2.172. ☺ Все плоские углы выпуклого n-гранного угла прямые. Найдите возможные значения n.

2.173. Два плоских угла трехгранного угла равны по 105°. В каких пределах может изменяться третий плоский угол?

2.174. ☺ Все углы выпуклого пятигранного угла равны между собой. Чему может быть равна их градусная мера?

2.175. ☺ Все плоские углы при вершине трехгранного угла равны α.

Найдите его двугранные углы при α, равном 30°, 45°, 60°, 90°, и заполните таблицу.

α	30°	45°	60°	90°
$\alpha_{дв}$				

2.176. Все плоские углы трехгранного угла прямые. Найдите: а) расстояние от вершины угла до точки, лежащей внутри трехгранного угла и удаленной от всех его граней на расстояние a; б) расстояние от вершины угла до точки, лежащей внутри трехгранного угла и удаленной от всех его ребер на расстояние a; в) угол, который образует с плоскостью боковой грани луч, лежащий внутри данного угла и составляющий со всеми его гранями равные углы; г) угол, который образует с ребром многогранного угла луч, лежащий внутри данного угла и составляющий со всеми его ребрами равные углы.

2.177. ☺ Все плоские углы выпуклого четырехгранного угла равны 60°. Найдите его двугранные углы при ребрах, если они все равны между собой.

2.178. $MABC$ — трехгранный угол. Его плоские углы равны: $\angle AMB = \alpha$, $\angle AMC = \beta$, $\angle BMC = \varphi$. Найдите угол наклона прямой MA к плоскости AMB.

2.179. ♉ Все плоские углы трехгранного угла $MABC$ равны α. $MA = MB = MC = 1$. Найдите длину вектора $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}$.

2.180. ♉ Все плоские углы трехгранного угла $MABC$ равны соответственно α, β, γ. $MA = MB = MC = 1$. Найдите длину вектора $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}$.

2.181. ☺ Плоские углы выпуклого трехгранного угла равны 60°. Найдите: а) расстояние от вершины угла до точки, лежащей внутри трехгранного угла и удаленной от всех его граней на расстояние a; б) расстояние от вершины угла до точки, лежащей внутри трехгранного угла и удаленной от всех его ребер на расстояние a; в) угол, который образует с плоскостью грани трехгранного угла луч, лежащий внутри данного угла и составляющий со всеми его гранями равные углы; г) угол, который образует с ребром многогранного угла луч, лежащий внутри данного угла и составляющий со всеми его ребрами равные углы.

2.182. Все плоские углы выпуклого четырехгранного угла равны α. Найдите его двугранные углы при ребрах, если они все равны между собой.

2.183. ♉ Все плоские углы выпуклого четырехгранного угла равны 60°. Два противоположных ребра этого четырехгранного угла взаимно перпендикулярны. Найдите угол между двумя другими противоположными ребрами.

2.184. ♉ Все плоские углы выпуклого четырехгранного угла равны 60°. Два противоположных ребра этого четырехгранного угла также составляют угол 60°. Найдите угол между двумя другими противоположными ребрами.

2.185. ☺ Три плоскости $2x + 2y - z + 9 = 0$, $3x + 4y + 9 = 0$ и $x - 2y + 2z - 17 = 0$ имеют единственную общую точку. а) Найдите эту точку. б) Определите число трехгранных углов, образованных данными плоскостями. в) Найдите уравнения прямых, на которых лежат ребра этих трехгранных углов. г) Определите условие, которому должны удовлетворять координаты точек, лежащих с началом координат внутри одного и того же трехгранного угла. д) Определите фигуры, которые являются пересечением каждой из осей координат и трехгранного угла, содержащего начало координат.

Задачи к 14.1, 14.2. Определение пирамиды и ее элементов. Некоторые виды пирамид

2.186. ☺ У пирамиды 161 грань. Сколько у нее ребер?

2.187. ☺ (*Устно.*) Основание пирамиды — прямоугольник со сторонами 6 и 8; каждое боковое ребро пирамиды равно 13. Найдите высоту пирамиды.

2.188. ☺ Основание пирамиды — равнобедренный треугольник с основанием 6 и высотой 9; все боковые ребра пирамиды равны 13. Найдите высоту пирамиды.

2.189. В основании треугольной пирамиды лежит треугольник со сторонами 5, 6 и $\sqrt{31}$. Все боковые ребра пирамиды равны между собой. Высота пирамиды составляет с каждым из ее боковых ребер угол 60°. Найдите боковое ребро.

2.190. Основанием пирамиды является трапеция с основаниями 2 и 10 и высотой 4. Все боковые ребра пирамиды наклонены к плоскости основания под углом 45°. Найдите боковое ребро и высоту пирамиды.

2.191. В треугольной пирамиде длины пяти ребер равны 25, а длина шестого равна 14. Найдите длины всех высот пирамиды (расстояния от вершин пирамиды до противоположных им граней).

2.192. В основании пирамиды $MABCD$ лежит ромб $ABCD$ с диагоналями $AC = 6$; $BD = 8$, а все боковые грани образуют с основанием угол 45°. Найдите: а) высоту пирамиды; б) расстояние от вершины M до ребра основания; в) расстояние от вершины A до плоскости MBC; г) площадь сечения, проходящего через ребро AD и точку пересечения медиан грани MCB.

2.193. Основанием пирамиды $MABCD$ является трапеция $ABCD$ с прямым углом A и основаниями $BC = 3$, $AD = 6$. Все боковые грани образуют с высотой угол 60°. Найдите высоту пирамиды.

2.194. ☺ Основание пирамиды — правильный треугольник, а высота пирамиды проходит через один из центров вневписанной окружности и равна радиусу этой окружности. Найдите величины двугранных углов пирамиды при ребрах ее основания.

2.195. ☺ Основанием пирамиды является треугольник со сторонами 13, 14, 15. Угол между плоскостью основания и плоскостью каждой из боковых граней равен 30°. Рассмотрите четыре возможных случая и для каждого из них найдите высоту пирамиды.

2.196. ♉ Основание пирамиды — равнобедренный треугольник ABC с углом A, равным α. Высота пирамиды проходит через центр окружности, вписанной в основание, и равна боковой стороне треугольника. Найдите угол наклона боковых граней к основанию. (Для каждого $0° < \alpha < 180°$ рассмотрите все случаи.)

2.197. ☺ Основание пирамиды — равнобедренный треугольник с основанием 12 и боковой стороной 10. Найдите высоту пирамиды, если все ее боковые грани образуют с плоскостью основания двугранные углы в 45°.

2.198. Основанием пирамиды является ромб, а высота пирамиды равна $2\sqrt{3}$ и проходит через центр основания. Найдите сторону основания пирамиды, если расстояния от центра основания пирамиды до боковых ребер равны 2 и $\sqrt{3}$.

2.199. Найдите боковое ребро треугольной пирамиды, высота которой проходит через центр окружности, описанной около основания, если стороны основания пирамиды равны 50, 78 и 112, а высота 72.

2.200. ♉ Два боковых ребра треугольной пирамиды и заключенная между ними сторона основания равны соответственно 6 дм, 9 дм и 9 дм. Высота пирамиды проходит через центр вписанной в основание окружности и равна $3\sqrt{3}$ дм. Найдите неизвестные стороны основания.

2.201. (*Устно.*) Основанием пирамиды служит параллелограмм со сторонами 3 и 7 и диагональю 6; высота пирамиды проходит через точку пересечения диагоналей основания и равна 4. Найдите боковые ребра пирамиды.

2.202. Боковые грани треугольной пирамиды образуют с плоскостью основания равные углы, а периметр основания равен 60 см. Два боковых ребра пирамиды равны 15 см и 20 см и образуют прямой угол. Найдите третье боковое ребро.

Пирамиды, одна или несколько граней которых перпендикулярны плоскости основания

2.203. ☺ В основании пирамиды лежит равнобедренный прямоугольный треугольник с катетом 2. Ровно одна боковая грань пирамиды, являясь равнобедренным прямоугольным треугольником, перпендикулярна плоскости основания. Какие значения может принимать высота пирамиды?

2.204. ☺ В основании пирамиды $MABCD$ ромб $ABCD$ с диагоналями 6 и 8. Плоскость грани MAB перпендикулярна плоскости основания, $AM = AB$ и $\angle BAM = 150°$. Найдите высоту пирамиды.

2.205. ☺ В основании пирамиды лежит квадрат со стороной a. Одна из боковых граней пирамиды перпендикулярна ее основанию, а две соседние с ней грани образуют с основанием двугранные углы по 45°. Найдите высоту пирамиды.

2.206. В основании пирамиды лежит ромб со стороной a и углом 60°. Одна из боковых граней пирамиды перпендикулярна ее основанию, а две соседние с ней грани образуют с основанием углы по 45°. Найдите высоту пирамиды.

2.207. В основании пирамиды лежит квадрат со стороной a. Двугранный угол при одном из ребер основания пирамиды прямой, а двугранные углы при соседних с ним ребрах основания равны α и β. Найдите высоту пирамиды.

2.208. ♉ В основании пирамиды лежит равнобедренный треугольник, две стороны которого равны b, а угол между ними α. Одна из боковых граней пирамиды перпендикулярна плоскости основания, а две другие грани образуют с основанием двугранные углы, равные β и содержащие данную пирамиду. Какие значения может принимать высота пирамиды?

2.209. В основании пирамиды лежит параллелограмм, две боковые грани пирамиды перпендикулярны основанию, а длина меньшего бокового ребра равна a. Найдите высоту пирамиды.

2.210. В основании пирамиды $MABCD$ лежит ромб $ABCD$ со стороной 2 и углом 60°. Две боковые грани пирамиды перпендикулярны основанию, а ее большее боковое ребро образует с основанием угол 60°. Найдите высоту пирамиды.

2.211. ♉ В основании пирамиды равнобедренный треугольник, две стороны которого равны b, а угол между ними α.

Две боковые грани пирамиды перпендикулярны плоскости основания, а третья образует с основанием угол β. Какие значения может принимать высота пирамиды?

2.212. ☺ В основании пирамиды $MABCD$ лежит трапеция $ABCD$, у которой $AB = BC = CD = 1$ и $AD = 2$. Грани MAB и MCD перпендикулярны основанию, а двугранный угол при ребре AD равен 30°. Найдите высоту пирамиды.

2.213. Основание пирамиды — правильный треугольник со стороной a. Одна из боковых граней перпендикулярна основанию и представляет собой равнобедренный треугольник с основанием $0{,}56a$. Найдите высоту пирамиды.

2.214. ☺ Основанием пирамиды является ромб с острым углом α. Одна из боковых граней является равносторонним треугольником и перпендикулярна плоскости основания. Найдите величины двугранных углов при ребрах основания пирамиды.

2.215. Основанием пирамиды служит прямоугольный треугольник с острым углом 60°. Боковая грань, содержащая гипотенузу пирамиды, перпендикулярна основанию, а две другие образуют с основанием углы по 45°. Высота пирамиды равна 8. Найдите площадь основания пирамиды.

2.216. ☺ Основание пирамиды — равнобедренный треугольник ABC, в котором $AB = AC = 13$, $BC = 10$. Ребра MC и MA наклонены к плоскости основания под углом 45°, а грань MBA перпендикулярна основанию пирамиды. Найдите высоту пирамиды.

2.217. Все боковые ребра треугольной пирамиды $MABC$ составляют с высотой MK углы, равные α; $AB = a$, $BC = 2a$; грань MAC перпендикулярна основанию. Найдите: а) площадь основания; б) высоту пирамиды.

2.218. Основание пирамиды — квадрат со стороной a. Две боковые грани перпендикулярны плоскости основания, а две другие составляют с ней угол 60°. Найдите высоту пирамиды.

2.219. Основание пирамиды — ромб со стороной a и тупым углом 120°. Две боковые грани перпендикулярны плоскости основания, а две другие составляют с ней угол 60°. Найдите высоту пирамиды (рассмотрите все случаи).

2.220. ♉ Основанием пирамиды является трапеция со сторонами a, a, a и $2a$. Две боковые грани перпендикулярны плоскости основания, а одна из двух других составляет с ней угол 45°. Найдите высоту пирамиды (рассмотрите все случаи).

2.221. В тетраэдре ребра AB, AC и AD соответственно равны 3, 4 и 5, а все плоские углы при вершине A — прямые. Найдите величину двугранного угла при каждом ребре пирамиды.

2.222. Основание пирамиды — правильный шестиугольник с ребром a. Найдите длины всех боковых ребер пирамиды, если ее две не соседние боковые грани перпендикулярны плоскости ее основания, а высота пирамиды равна удвоенному диаметру окружности, вписанной в основание.

2.223. ♉ В треугольной пирамиде скрещивающиеся ребра попарно равны между собой. Найдите сумму плоских углов при вершине пирамиды.

2.224. Основание пирамиды — квадрат $ABCD$ со стороной a. Боковые ребра MB и MA равны между собой, двугранный угол при ребре AD равен α, а при ребре DC равен β ($\beta < \alpha < 90°$). Найдите: а) высоту пирамиды; б) угол наклона к основанию пирамиды большего бокового ребра.

2.225. ♉ Основание пирамиды $MABCD$ — ромб $ABCD$ с острым углом BCD, равным 60°, и высотой 12. Вершина M равноудалена от прямых AD, BC и от вершин B и C. Найдите длины боковых ребер, если высота пирамиды равна 1.

Задачи к 14.3. Правильная пирамида

2.226. ☺ (*Устно.*) Основание высоты MO правильной четырехугольной пирамиды $MABCD$ удалено от плоскости боковой грани MAB на 4 см. Найдите расстояние от вершины C до плоскости MAB.

2.227. ☺ Высота правильной четырехугольной пирамиды равна 1, а сторона основания 4. Найдите длину бокового ребра пирамиды.

2.228. $MABCDKP$ — правильная шестиугольная пирамида с вершиной M и основанием $ABCDKP$. Сечение, проходящее через точки M, A и D, — равносторонний треугольник со стороной 6. Найдите боковое ребро и высоту пирамиды.

2.229. (*Устно.*) Высота правильной четырехугольной пирамиды равна 7 см, а сторона основания 8 см. Найдите боковое ребро.

2.230. По данным стороне основания a и боковому ребру b найдите высоту правильной пирамиды, если пирамида: а) треугольная; б) четырехугольная; в) шестиугольная.

2.231. ☺ В правильной четырехугольной пирамиде $MABCD$ плоский угол при вершине равен α. Сторона основания a. Найдите: а) двугранный угол при ребре основания; б) двугранный угол при боковом ребре; в) угол между плоскостями соседних боковых граней; г) угол между плоскостями не соседних боковых граней; д) длину высоты; е) расстояние от центра основания до боковой грани; ж) расстояние от вершины A до боковой грани MCB; з) угол между боковой гранью и не лежащим в ней боковым ребром; и) угол между боковой гранью и пересекающим ее ребром основания; к) расстояние от K (середины ребра AB) до боковой грани MCB; л) угол между боковой гранью и не лежащей в ней апофемой; м) все высоты тетраэдра $MABC$; н) все высоты тетраэдра $MAKC$.

2.232. ♉ Правильная четырехугольная пирамида $MABCD$ и правильная треугольная пирамида $KTLQ$ имеют общую высоту MK, равную отрезку QC. Определите количество граней, ребер и вершин многоугольника, являющегося пересечением этих пирамид.

2.233. ☺ Основание правильного тетраэдра $DABC$ с ребром 1 является боковой гранью правильной четырехугольной пирамиды $ABCPQ$. Вершина D лежит вне пирамиды $ABCPQ$. Найдите: а) расстояние между вершинами D и P; б) угол между прямыми BD и QC.

2.234. ♉ В правильной четырехугольной пирамиде $MABCD$ все ребра равны b. Правильная треугольная пирамида $KAPT$ расположена так, что точки P и T лежат соответственно на ребрах BC и CD, а вершина — на боковой поверхности пирамиды $MABCD$. Найдите расстояние между точками M и K.

2.235. ♉ Дана правильная четырехугольная пирамида $MABCD$. Можно ли на прямых MA и CD найти четыре вершины правильного тетраэдра? Ответ обоснуйте.

2.236. Правильная четырехугольная пирамида $MABCD$ такова, что на прямой AB и на прямой, содержащей апофему грани MCD, можно найти четыре вершины правильного тетраэдра. Найдите отношение ребра этого тетраэдра к ребру основания пирамиды $MABCD$.

2.237. В правильную четырехугольную пирамиду вписан куб так, что четыре его вершины находятся на боковых ребрах пирамиды, а остальные четыре лежат в плоскости ее основания. Найдите ребро куба, если сторона основания пирамиды равна a, а высота h.

2.238. ☺ По данным стороне a и высоте h правильной пирамиды найдите ее апофему, если пирамида: а) треугольная; б) четырехугольная; в) шестиугольная.

2.239. Определите двугранный угол при основании правильной четырёхугольной пирамиды, боковая грань и диагональное сечение которой равновелики.

2.240. ♉ Найдите боковое ребро правильной треугольной пирамиды, высота которой равна $\sqrt{7}$, а высота боковой грани, опущенная на боковое ребро, — $\sqrt{5}$.

2.241. Двугранный угол при боковом ребре правильной треугольной пирамиды равен 120°, расстояние от центра основания пирамиды до бокового ребра равно a. Найдите высоту пирамиды.

2.242. ☺ В правильной треугольной усеченной пирамиде сторона нижнего основания 8 м, верхнего — 5 м, а высота — 3 м. Проведите сечение через сторону нижнего основания и противоположную вершину верхнего основания. Найдите площадь сечения и двугранный угол между сечением и нижним основанием.

2.243. Стороны оснований правильной четырехугольной усеченной пирамиды $ABCDA_1B_1C_1D_1$ равны a и b ($a > b$). Угол между плоскостью основания и плоскостью ABC_1 равен α. Найдите: а) площадь сечения ABC_1D_1; б) площадь сечения пирамиды плоскостью, проходящей через точку пересечения диагоналей пирамиды параллельно ее основаниям.

2.244. ☺ В правильной треугольной пирамиде через сторону основания проведена плоскость перпендикулярно противолежащему боковому ребру. Найдите площадь получившегося сечения, если сторона основания равна a, а высота пирамиды h.

2.245. Высота правильной четырехугольной пирамиды равна h и образует с боковой гранью угол α. Через сторону основания пирамиды проведена плоскость, перпендикулярная противоположной грани и пересекающая ее. Найдите площадь сечения.

Дано: $PABCD$ — правильная пирамида (рис. 16); PO — высота пирамиды, $PO = h$, $\angle OPF = \alpha$. Найти S_{ADKM}.

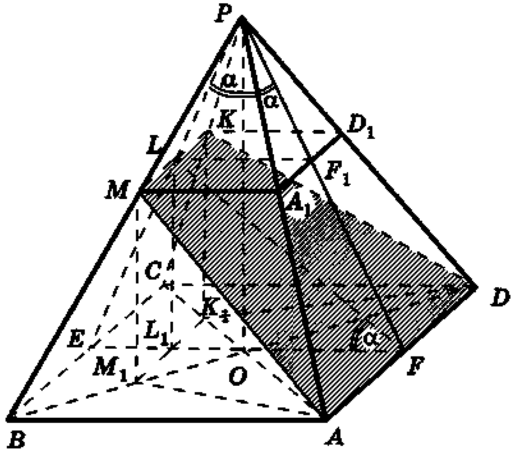


Рис. 16

Решение. П е р в ы й с п о с о б. Пусть EF — средняя линия основания пирамиды. Тогда $AD \perp EF$, $AD \perp PF \Rightarrow AD \perp (PEF) \Rightarrow$ $\Rightarrow (PEF) \perp (ADP)$ (по признаку перпендикулярности двух плоскостей). Поэтому прямая PF является ортогональной проекцией прямой PO на плоскость ADP. Значит, $\angle OPF$ — угол между высотой PO и боковой гранью ADP пирамиды: $\angle OPF = \alpha$.

Далее, имеем $AD \perp (PEF)$, $BC \| AD \Rightarrow BC \perp (PEF) \Rightarrow$ прямая BC перпендикулярна любой прямой плоскости PEF. Поэтому если $FL \perp PE$ (в плоскости PEF), то $BC \perp FL$. Тогда $FL \perp BC$, $FL \perp PE \Rightarrow FL \perp (BCP) \Rightarrow (ADL) \perp (BCP)$ (по признаку перпендикулярности двух плоскостей), при этом $(ADL) \cap (BCP) = MK$, $MK \| AD$, так как плоскости BCP и ADL проходят через параллельные прямые BC и AD. Значит, сечение $ADKM$ — трапеция, у которой FL — высота (почему?), откуда $S_{сеч} = \dfrac{AD + MK}{2} \cdot FL$.

Найдем AD, MK и FL.

Имеем $\triangle OPF$ ($\angle POF = 90°$): $OF = OP \cdot \operatorname{tg} \alpha = h \cdot \operatorname{tg} \alpha$; $PF =$ $= \dfrac{OP}{\cos \alpha} = \dfrac{h}{\cos \alpha} = PE$.

Поэтому $EF = 2FO = 2h \cdot \operatorname{tg} \alpha = BC$.

В плоскости PEF получаем $FL \perp PE$, $PO \perp EF \Rightarrow \angle EFL = \angle OPE = \alpha$. Тогда в $\triangle EFL$: $FL = EF \cdot \cos\alpha = 2h \cdot \operatorname{tg}\alpha \cdot \cos\alpha = 2h\sin\alpha$.

$$\text{В } \triangle PLF\ (\angle PLF = 90^\circ,\ \angle PFL = 90^\circ - 2\alpha):$$

$$PL = PF \cdot \sin(90^\circ - 2\alpha) = PF \cdot \cos 2\alpha = \frac{h\cos 2\alpha}{\cos\alpha}.$$

Так как $MK \| BC$, то $\triangle MKP \sim \triangle BCP$, откуда $\frac{MK}{BC} = \frac{PL}{PE} \Rightarrow$

$$\Rightarrow MK = \frac{BC \cdot PL}{PE} = \frac{2h \cdot \operatorname{tg}\alpha \cdot \frac{h \cdot \cos 2\alpha}{\cos\alpha}}{\frac{h}{\cos\alpha}} = 2h\operatorname{tg}\alpha\cos 2\alpha.$$

Таким образом, $AD = EF = 2h \cdot \operatorname{tg}\alpha$, $FL = 2h \cdot \sin\alpha$, $MK = 2h\operatorname{tg}\alpha\cos 2\alpha$.

Тогда

$$S_{\text{сеч}} = \frac{AD + MK}{2} \cdot FL = \frac{2h \cdot \operatorname{tg}\alpha + 2h \cdot \operatorname{tg}\alpha \cdot \cos 2\alpha}{2} \cdot 2h \cdot \sin\alpha =$$

$$= \frac{2h \cdot \operatorname{tg}\alpha \cdot (1 + \cos 2\alpha) \cdot 2h \cdot \sin\alpha}{2} = 4h^2\sin^2\alpha\cos\alpha.$$

! ***Замечание.*** Отрезок MK можно найти следующим образом. Сечением данной пирамиды плоскостью, проходящей через прямую MK параллельно основанию пирамиды, является квадрат MKD_1A_1 (рис. 16). $F_1 = A_1D_1 \cap PF$. У этого квадрата $LF_1 = MK$. Найдем F_1L.

В треугольнике LFF_1 имеем $\angle FLF_1 = \alpha$ ($LF_1 \| EF$), $\angle F_1FL = \angle OFP - \angle OFL = (90^\circ - \alpha) - \alpha = 90^\circ - 2\alpha$;

$\angle FF_1L = 180^\circ - \angle OFF_1 = 90^\circ + \alpha$. Тогда по теореме синусов $\frac{LF_1}{\sin(90^\circ - 2\alpha)} = \frac{LF}{\sin(90^\circ + \alpha)} \Rightarrow LF_1 = \frac{LF\cos 2\alpha}{\cos\alpha} = \frac{2h \cdot \sin\alpha \cdot \cos 2\alpha}{\cos\alpha}$.

Значит, $MK = LF_1 = 2h\operatorname{tg}\alpha\cos 2\alpha$.

В т о р о й с п о с о б. Пусть M_1, K_1, L_1 — ортогональные проекции на плоскость основания соответственно точек M, K, L (рис. 16, 17). Так как плоскости ACP, BDP и EFP перпендикулярны плоскости основания пирамиды, то ортогональными проекциями прямых PC, PB и PE на эту плоскость являются соответственно прямые AC, BD и EF. Следовательно, $M_1 \in BD$, $K_1 \in AC$, $L_1 \in EF$, причем ADK_1M_1 — равнобедренная трапеция.

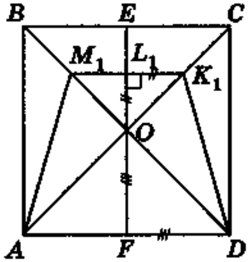


Рис. 17

Таким образом, трапеция ADK_1M_1 — ортогональная проекция сечения $ADKM$. Это означает, что $S_{ADKM} = \frac{S_{ADK_1M_1}}{\cos\alpha}$. Найдем $S_{ADK_1M_1}$. Так как диагонали квадрата взаимно перпендикулярны и $M_1K_1 \| AD$, то $OL_1 = L_1K_1$, $OF = FD$. Значит, $S_{ADK_1M_1} =$
$= \frac{AD + K_1M_1}{2} \cdot L_1F = \frac{2OF + 2OL_1}{2} \cdot FL_1 =$
$= FL_1^2$. Тогда $S_{ADKM} = \frac{FL_1^2}{\cos\alpha} = \frac{FL^2 \cdot \cos^2\alpha}{\cos\alpha} = 4h^2 \sin^2\alpha \cos\alpha$.

Ответ: $4h^2 \sin^2\alpha \cos\alpha$.

2.246. ♉ Сторона основания правильной четырехугольной пирамиды равна a. Боковое ребро образует с высотой угол в 30°. Постройте сечение пирамиды, проходящее через вершину ее основания перпендикулярно противолежащему боковому ребру и найдите его площадь.

2.247. ♉ По стороне основания a и высоте h правильной шестиугольной пирамиды найдите площадь сечения, проведенного через сторону основания и середину высоты пирамиды.

2.248. ♉ Площадь боковой грани правильной шестиугольной пирамиды равна Q. Найдите площадь сечения, которое параллельно боковой грани пирамиды и проходит через середину ее высоты.

Задачи к 14.4. Площади боковой и полной поверхностей пирамиды

2.249. ☺ Найдите площадь боковой поверхности правильной треугольной пирамиды, если ее высота равна 4 см, а апофема 8 см.

2.250. По стороне основания a и высоте h правильной пирамиды найдите площадь ее полной поверхности, если эта пирамида: а) треугольная; б) четырехугольная; в) шестиугольная.

2.251. Найдите площадь боковой поверхности правильной треугольной пирамиды, если сторона основания a и боковое ребро образует с плоскостью основания угол в 45°.

2.252. Найдите сторону основания и апофему правильной треугольной пирамиды, если ее боковое ребро и площадь боковой поверхности соответственно равны 10 см и 144 см^2.

2.253. ☺ Основанием пирамиды служит параллелограмм, у которого стороны равны 4 и 5, а одна из диагоналей 3; высота пирамиды, равная 2, проходит через точку пересечения диагоналей основания. Найдите площадь полной поверхности пирамиды.

2.254. ☺ Основанием пирамиды служит треугольник со сторонами 13 см, 14 см и 15 см. Боковое ребро, противолежащее средней по длине стороне основания, перпендикулярно плоскости основания и равно 16 см. Найдите площадь полной поверхности пирамиды.

2.255. Найдите высоту и площадь полной поверхности правильной четырехугольной пирамиды, сторона основания которой равна 30 см, а центр основания удален от боковой грани на 12 см.

2.256. ♉ Площадь сечения правильной четырехугольной пирамиды, проведенного через центр основания пирамиды параллельно боковой грани, равна Q. Найдите площадь боковой поверхности пирамиды.

2.257. Центр одной из граней куба и середины сторон противоположной грани служат вершинами пирамиды. Найдите площадь боковой поверхности пирамиды, если ребро куба равно a.

2.258. Основание пирамиды — прямоугольник, диагональ которого равна 8 см. Плоскости двух боковых граней перпендикулярны плоскости основания, а две другие боковые грани образуют с основанием углы в 30° и 45°. Найдите площадь полной поверхности пирамиды.

2.259. Два боковых ребра треугольной пирамиды равны 25 см и 30 см, а сторона основания, заключенная между ними, равна 25 см. Найдите другие стороны основания, если площадь боковой поверхности пирамиды равна 840 см^2 и высота проходит через центр вписанной в основание окружности.

2.260. ☺ Основанием пирамиды является ромб с острым углом в 30°. Каждый двугранный угол при основании пирамиды равен 60°. Найдите площадь полной поверхности пирамиды, если высота ее равна h.

2.261. Боковое ребро правильной четырехугольной пирамиды равно 12 см и образует с плоскостью основания угол в 60°. Найдите площадь полной поверхности пирамиды.

2.262. Основание пирамиды — правильный треугольник со стороной a; одна из боковых граней пирамиды также является равносторонним треугольником и перпендикулярна плоскости основания. Найдите площадь боковой поверхности этой пирамиды.

2.263. Найдите площадь боковой поверхности правильной четырехугольной пирамиды, у которой: а) боковое ребро больше стороны основания на 6 см, а высота равна $2\sqrt{69}$ см; б) боковое ребро больше апофемы на 2 см, а высота равна $2\sqrt{69}$ см.

2.264. Основанием пирамиды служит ромб с диагоналями 6 и 8. Высота пирамиды проходит через точку пересечения диагоналей основания и равна 1. Найдите площади боковой и полной поверхностей этой пирамиды.

2.265. ☺ В каком отношении делится боковая поверхность правильной четырехугольной пирамиды плоскостью, проходящей через сторону основания и середину высоты пирамиды?

2.266. Найдите площадь боковой поверхности правильной треугольной пирамиды, высота которой равна $3\sqrt{13}$ см, а периметр боковой грапи равен 48 см.

2.267. Основанием пирамиды служит треугольник, стороны которого 29 см, 35 см и 48 см. Высота пирамиды проходит через центр вписанной в ее основание окружности и меньше высоты боковой грани на 3 см. Найдите площадь полной поверхности пирамиды.

2.268. Высота PO треугольной пирамиды $PABC$ проходит через центр вписанной в ее основание окружности. Найдите площадь боковой поверхности пирамиды, если: а) $BC - AB = 9$ дм, $AC = 21$ дм, $\angle ABC = 60°$, $PO = 3$ дм; б) $AB - BC = 1$ см, $\angle ABC = 120°$, $S_{осн} = 14\sqrt{3}$ см^2, и боковые грани наклонены к плоскости основапия под углом в 30°.

2.269. ♉ Двугранный угол при стороне основания правильной треугольной пирамиды равен 45°. Найдите площадь полной поверхности пирамиды, если ее высота равна h.

2.270. ♉ В правильной четырехугольной пирамиде высота равна h, плоский угол при вершине равен α. Найдите площадь боковой поверхности пирамиды.

2.271. ♉ Высота правильной четырехугольной пирамиды равна h и составляет с плоскостью боковой грани угол φ. Найдите площадь полной поверхности пирамиды.

2.272. ☺ Площадь полной поверхности тетраэдра $MABC$ равна 12 см^2. Найдите площадь полной поверхности тетраэдра $M_1A_1B_1C_1$, где точка M_1 симметрична M относительно плоскости ABC, точка A_1 симметрична A относительно плоскости BCM, точка B_1 симметрична B относительно плоскости AMC, точка C_1 симметрична C относительно плоскости ABM.

2.273. Боковое ребро правильной треугольной пирамиды равно 13, а сторона основания 10. Найдите площадь полной поверхности пирамиды.

Задачи к 14.5, 14.6. Свойства параллельных сечений пирамиды. Усеченная пирамида

2.274. В правильной усеченной треугольной пирамиде сторона большего основания a, сторона меньшего b. Боковое ребро образует с основанием угол в 45°. Найдите площадь сечения, проходящего через боковое ребро и ось пирамиды.

2.275. ☺ Сечение пирамиды, параллельное ее основанию, делит высоту пирамиды в отношении 2 : 3 (считая от вершины), а площадь сечения меньше площади основания пирамиды на 105 см^2. Найдите площадь основания.

2.276. ☺ Площадь основания пирамиды равна 162 см^2, а площадь сечения, параллельного основанию, 32 см^2, расстояние между основанием пирамиды и ее сечением равно 10 см. Найдите высоту пирамиды.

2.277. ☺ Основанием пирамиды служит треугольник, стороны которого равны 5 дм, 5 дм и 6 дм, а высота пирамиды проходит через центр вписанной в основание окружности. Высота боковой грани пирамиды равна 2,5 дм. Найдите площадь сечения, параллельного основанию пирамиды и проведенного на расстоянии 8 см от вершины.

Задачи к 14.7, 14.8. Объем пирамиды

2.278. ☺ В основании призмы $ABCDA_1B_1C_1D_1$ лежит параллелограмм $ABCD$. Найдите объем пирамиды D_1ABC, если объем призмы равен V.

2.279. (*Устно.*) В правильной четырехугольной пирамиде боковое ребро 5 м, высота 3 м. Найдите объем.

2.280. ☺ (*Устно.*) Боковые ребра треугольной пирамиды попарно взаимно перпендикулярны и равны a, b и c. Найдите объем пирамиды.

2.281. В правильной четырехугольной пирамиде боковое ребро равно b и наклонено к плоскости основания под углом α. Найдите объем пирамиды.

2.282. ☺ В правильной четырехугольной пирамиде апофема равна h и составляет с высотой пирамиды угол β. Найдите объем пирамиды.

2.283. Боковые грани AMB и CMB пирамиды $MABC$ — прямоугольные треугольники, причем $MB = BC = AB = 6$. Величина двугранного угла $A(MB)C$ равна $30°$. Найдите объем пирамиды.

2.284. Дана правильная пирамида со стороной основания a и боковым ребром b. Найдите объем пирамиды, если она: а) треугольная; б) четырехугольная; в) шестиугольная.

2.285. Угол между плоскостями противоположных боковых граней правильной четырехугольной пирамиды равен $60°$. Найдите объем пирамиды, если ее высота равна 1.

2.286. ☺ (*Устно.*) Основание пирамиды — прямоугольник со сторонами 6 и 8; каждое из боковых ребер равно $5\sqrt{3}$. Найдите объем пирамиды.

2.287. Площадь грани MAB треугольной пирамиды $MABC$ равна 10 м^2, ребро MC равно 6 м и образует с плоскостью MAB угол в $30°$. Найдите объем пирамиды.

2.288. ☺ В треугольной пирамиде $MABC$ точка K — середина ребра AM, точка P — середина ребра BM, T — такая точка ребра MC, что $MT : TC = 3$. Найдите объем многогранника $ABCKPT$, если объем данной пирамиды равен 16.

2.289. В основании четырехугольной пирамиды $MABCD$ лежит параллелограмм $ABCD$. Сечение, проходящее через середину ребра MC и вершины B и D пирамиды, отсекает от нее тетраэдр объемом 1 см^3. Найдите объем данной пирамиды.

2.290. ☺ В основании пирамиды $MABC$ лежит треугольник ABC, у которого $AB = 6$, $\angle BCA = 75°$. Ребро MA перпендикулярно основанию, а ребра MB и MC образуют с основанием углы по 45°. Найдите объем пирамиды.

2.291. ♉ Найдите объем тетраэдра, если одно из его ребер равно $2\sqrt{3}$, а каждое из остальных пяти ребер равно 4.

2.292. В основании пирамиды $MABCD$ лежит трапеция $ABCD$, у которой $AB = BC = CD = a$ и $AD = 2a$. Высота пирамиды лежит в грани MAB, являющейся равносторонним треугольником. Найдите объем пирамиды.

2.293. ☺ Две грани треугольной пирамиды — равносторонние треугольники, плоскости которых перпендикулярны. Найдите объем пирамиды, если длина ее наибольшего ребра равна 1.

2.294. $MABCD$ — правильная четырехугольная пирамида, вершины M, A и B которой имеют координаты: $M(0; 0; 6)$, $A(3; 0; 0)$, $B(0; -3; 0)$. Найдите координаты остальных вершин и объем этой пирамиды, если MO — ее высота, где O — начало координат.

2.295. ☺ Найдите боковое ребро правильной шестиугольной пирамиды, если ее объем равен 6, а сторона основания 1.

2.296. ☺ Ребро правильного тетраэдра равно a. Найдите его объем.

2.297. Высота правильной треугольной пирамиды равна 11 см, а сторона основания пирамиды меньше бокового ребра на 1 см. Найдите объем пирамиды.

2.298. ☺ Найдите объем правильной треугольной пирамиды, если: а) сторона основания равна a, боковое ребро образует с плоскостью основания угол в 45°; б) высота пирамиды h, боковая грань образует с плоскостью основания угол в 60°.

2.299. ☺ В правильной шестиугольной пирамиде, объем которой V, сторона основания вдвое меньше бокового ребра. Найдите сторону основания и угол наклона бокового ребра к плоскости основания.

2.300. Найдите объем правильной шестиугольной пирамиды, сторона основания которой равна 8 см, а площадь меньшего диагонального сечения $20\sqrt{3}$ см^2.

2.301. Основанием пирамиды служит равнобедренный треугольник, у которого стороны равны 39 см, 30 см и 39 см. Боковые грани образуют с плоскостью основания углы по 45°. Найдите объем пирамиды.

2.302. В пирамиде двугранные углы при основании равны между собой, стороны основания 7 см, 8 см и 9 см; объем пирамиды равен 40 см^3. Найдите площадь ее боковой поверхности.

2.303. ☺ В основании пирамиды лежит ромб со стороной 15 см, каждая боковая грань образует с плоскостью основания угол в 45°. Найдите объем пирамиды, если площадь ее боковой поверхности 3 дм^2.

2.304. Основанием пирамиды служит параллелограмм, стороны которого 4 дм и 6 дм. Боковое ребро, проходящее через вершину тупого угла параллелограмма, является высотой пирамиды, а высоты ее боковых наклонных граней равны 5 дм и $2\sqrt{5}$ дм. Найдите объем пирамиды.

2.305. ☺ В правильной треугольной пирамиде боковые ребра взаимно перпендикулярны, сторона ее основания равна a. Найдите объем пирамиды.

2.306. ♉ Докажите, что середины всех ребер правильного тетраэдра являются вершинами правильного октаэдра и найдите объем этого октаэдра, если ребро тетраэдра равно a.

2.307. $PABC$ — правильная треугольная пирамида. Сечение пирамиды, проведенное через центр ее основания параллельно стороне AB и боковому ребру PC, является квадратом со стороной a. Найдите объем пирамиды.

2.308. ☺ $PABCD$ — правильная четырехугольная пирамида, боковое ребро которой 25 см, а расстояние от вершины A до ребра PC равно 24 см. Найдите объем пирамиды.

2.309. ♉ Из всех правильных четырехугольных пирамид, имеющих периметр боковой грани, равный $2p$, найдите объем той пирамиды, которая имеет наибольшую боковую поверхность.

2.310. Центры граней правильного тетраэдра служат вершинами нового правильного тетраэдра. Найдите отношения их площадей поверхностей и объемов.

2.311. ♉ В треугольной пирамиде одна из сторон основания 16 см, противоположное ей боковое ребро 18 см; каждое из четырех остальных ребер равно 17 см. Найдите объем пирамиды.

2.312. Основанием пирамиды является равнобедренная трапеция, боковая сторона которой равна 15 дм, а большее основание 24 дм. Высота пирамиды проходит через центр окружности, вписанной в основание. Найдите объем пирамиды, если площадь ее боковой поверхности равна 300 дм^2.

2.313. Основанием пирамиды $PABC$ служит треугольник ABC, в котором $AB = BC = a$, $\angle ABC = \alpha$. Боковая грань PBC перпендикулярна основанию, а две другие боковые грани наклонены к нему под углом β. Найдите объем пирамиды.

2.314. ♉ Площадь боковой поверхности правильной четырехугольной пирамиды Q. Боковые ребра наклонены к плоскости основания под углом α. Найдите объем пирамиды.

2.315. ♉ Найдите объем пирамиды, имеющей основанием треугольник, два угла которого α и β, радиус описанной окружности R. Боковые ребра пирамиды наклонены к плоскости ее основания под углом γ.

2.316. Основание ABC пирамиды $MABC$ — правильный треугольник со стороной 4. Двугранные углы $M(BC)A$ и $M(AC)B$ равны по 60°, а двугранный угол $M(AB)C$ равен 120°. Найдите объем пирамиды.

2.317. ♉ Докажите, что объем V тетраэдра может быть вычислен по формуле: $V = \frac{1}{6} \cdot a \cdot b \cdot d \cdot \sin\varphi$, где a, b — длины двух скрещивающихся ребер тетраэдра, φ — угол между прямыми, содержащими эти ребра, d — расстояние между этими прямыми.

2.318. ☺ В правильной четырехугольной пирамиде $MABCD$ проведено сечение через высоту MO и точку K на ребре AB. Найдите объем каждой из получившихся пирамид, если объем всей пирамиды V.

2.319. ☺ Два многогранника подобны с коэффициентом k. Найдите отношение их объемов.

2.320. Через середину бокового ребра пирамиды проведено сечение, параллельное основанию. Найдите объем пирамиды, если объем полученной усеченной пирамиды равен 9.

2.321. ☺ Высоту пирамиды разделили на 3 равные части и через каждую точку деления провели сечение, параллельное основанию пирамиды. Найдите объем каждого из многогранников, на которые разбилась пирамида, если объем пирамиды равен V.

2.322. В треугольной пирамиде $MABC$ провели сечение через середины ребер BC, MC и AB. В каком отношении разделился объем пирамиды?

2.323. ♉ $ABCD$ — правильный тетраэдр с ребром 6. На ребрах AB, AC и AD взяли точки соответственно A_1, A_2 и A_3 так, что $AA_1 = AA_2 = AA_3 = 2$; на ребрах BC, BA и BD взяли точки B_1, B_2 и B_3 так, что $BB_1 = BB_2 = BB_3 = 2$; на ребрах CA, CB и CD — точки C_1, C_2 и C_3 так, что $CC_1 = CC_2 = CC_3 = 2$ и на ребрах DA, DB и DC — точки D_1, D_2 и D_3 так, что $DD_1 = DD_2 = DD_3 = 2$. Через получившиеся точки провели сечения $A_1A_2A_3$, $B_1B_2B_3$, $C_1C_2C_3$, $D_1D_2D_3$. Найдите объем многогранника $A_1A_2A_3B_1B_2B_3C_1C_2C_3D_1D_2D_3$.

2.324. ☺ В основании пирамиды $MABC$ лежит треугольник ABC со сторонами $AB = 3$ и $AC = 2$; AK — биссектриса треугольника ABC. Объем пирамиды $BAKM$ равен 3 м^3. Найдите объем пирамиды $MABC$.

2.325. В основании пирамиды $MABCD$ лежит трапеция $ABCD$ с основаниями $BC = 3$ см и $AD = 7$ см. Объем пирамиды $MABC$ на 4 м^3 больше объема пирамиды $MACD$. Найдите объем пирамиды $MABCD$.

2.326. ☺ Объем параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ равен V. Найдите объем каждой из пирамид A_1ABD, C_1BCD, $DD_1A_1C_1$, $BA_1B_1C_1$ и A_1C_1BD.

2.327. ☺ На ребрах MA, MB и MC тетраэдра $MABC$ взяли соответственно точки A_1, B_1 и C_1. Докажите, что объем тетраэдра $MA_1B_1C_1$ относится к объему тетраэдра $MABC$, как произведение отрезков MA_1, MB_1 и MC_1 относится к произведению отрезков MA, MB и MC, т. е. $\frac{V_{MA_1B_1C_1}}{V_{MABC}} = \frac{MA_1 \cdot MB_1 \cdot MC_1}{MA \cdot MB \cdot MC}$.

2.328. ♉ В тетраэдре $MABC$ через точки K на ребре MA ($MK : KA = 3 : 4$), T на ребре MB ($MT = TB$) и E на ребре MC ($ME = 0{,}2MC$) проведено сечение KTE. Объем тетраэдра $MKTE$ равен 3 м^3. Найдите объем пятигранника $KTEABC$.

2.329. В тетраэдре $MABC$ через точки K на ребре MA ($MK : KA = 2 : 3$), T на ребре MB ($MT = 2TB$) и E на ребре MC ($ME = MC$) проведено сечение KTE, площадь которого равна 6 м^2. Объем тетраэдра $MABC$ равен 30 м^3. Найдите расстояние от точки M до плоскости KTE.

2.330. ♉ В основании пирамиды $MABCD$ лежит параллелограмм $ABCD$. Точка K — середина ребра AB, точка P — середина ребра BC, точка T делит ребро MB в отношении $2 : 7$, считая от B. Объем тетраэдра $BKPT$ равен 1 м^3. Найдите объем пирамиды $MABCD$.

2.331. ♉ В основании пирамиды $MABCD$ параллелограмм $ABCD$. В каком отношении, считая от вершины, делит объем пирамиды сечение, проходящее через ребро AB и середину ребра MC?

Задачи к 14.9. Объем усеченной пирамиды

2.332. ☺ В треугольной усеченной пирамиде $ABCA_1B_1C_1$ $AB = BC = AC = 6$, $A_1B_1 = B_1C_1 = A_1C_1 = 2$. Боковое ребро $AA_1 = 3$ и перпендикулярно плоскостям оснований. Найдите длины остальных боковых ребер усеченной пирамиды.

2.333. В треугольной усеченной пирамиде $ABCA_1B_1C_1$ $AB = BC = AC = 6$, $A_1B_1 = B_1C_1 = A_1C_1 = 2$. Боковое ребро $AA_1 = 4$, а грань BB_1C_1C представляет собой равнобокую трапецию, плоскость которой перпендикулярна плоскостям оснований. Найдите длины остальных боковых ребер усеченной пирамиды.

2.334. ♉ В правильной треугольной усеченной пирамиде шесть ребер равны 2, а три ребра равны 4. Найдите высоту усеченной пирамиды.

2.335. Стороны оснований правильной усеченной четырехугольной пирамиды 8 и 4, а длина бокового ребра $5\sqrt{2}$. Найдите высоту усеченной пирамиды. Решите задачу, если стороны оснований равны a и b ($a > b$), а длина бокового ребра c.

2.336. ☺ Стороны оснований правильной усеченной шестиугольной пирамиды a и b ($a > b$), а длина бокового ребра c. Найдите высоту усеченной пирамиды и допустимые значения c.

2.337. В треугольной усеченной пирамиде $ABCA_1B_1C_1$ длины всех боковых ребер равны 10, треугольник ABC, лежащий в нижнем основании пирамиды, имеет стороны $AB = 12$, $AC = 16$ и $BC = 20$. Найдите длины ребер верхнего основания пирамиды, если ее высота равна 6.

2.338. В правильном тетраэдре $ABCD$ провели сечение, разбившее тетраэдр на усеченную треугольную пирамиду и тетраэдр, имеющие равные площади полных поверхностей. Найдите отношение площади сечения к площади основания данного тетраэдра.

2.339. ☺ В треугольной усеченной пирамиде $ABCA_1B_1C_1$ $AB = BC = AC = 6$, $A_1B_1 = B_1C_1 = A_1C_1 = 2$. Вершина A_1 удалена от каждой из вершин основания ABC на расстояние 4. Найдите длины боковых ребер усеченной пирамиды.

2.340. В правильной усеченной пирамиде стороны нижнего и верхнего оснований равны a и b ($a > b$), а двугранный угол при ребре нижнего основания равен α. Найдите объем пирамиды, если она: а) четырехугольная; б) треугольная.

2.341. Две стороны большего основания треугольной усеченной пирамиды равны 20 см и 32 см, угол между ними 60°; периметр меньшего основания равен 20 см. Боковые грани одинаково наклонены к плоскости основания пирамиды, высота боковой грани равна $5\sqrt{3}$ см. Найдите объем пирамиды.

2.342. ☺ Найдите объем правильной четырехугольной усеченной пирамиды, диагональ которой 11 см, боковое ребро 9 см и разность между сторонами оснований равна 8 см.

Задачи к § 15. Правильные многогранники

2.343. ☺ (*Устно.*) Является ли правильным многогранником: а) правильная пирамида; б) правильная призма?

2.344. ☺ (*Устно.*) Существует ли пирамида (призма), являющаяся правильным многогранником?

2.345. ☺ Многогранник является объединением двух правильных тетраэдров, имеющих общее основание. Этот многогранник правильный?

2.346. ☺ Из одной вершины куба проведены три диагонали его граней, их концы соединены отрезками. Является ли правильным многогранником пирамида, ребрами которой служат построенные шесть отрезков?

2.347. ☺ Докажите, что центры всех граней правильного тетраэдра служат вершинами правильного тетраэдра.

2.348. ☺ Докажите, что центры граней куба служат вершинами правильного октаэдра.

2.349. ☺ (*Устно.*) Найдите площадь поверхности правильного октаэдра, если его ребро равно a.

2.350. ♉ Докажите, что сечением куба плоскостью, проходящей через его центр и перпендикулярной диагонали куба, является правильный шестиугольник. Найдите площадь этого шестиугольника, если ребро куба равно 6.

2.351. *Правильный тетраэдр называется вписанным в куб, если все вершины тетраэдра являются вершинами куба.* Докажите, что центр куба совпадает с центром вписанного в него правильного тетраэдра.

2.352. ☺ Определите вид четырехугольника, вершинами которого служат середины противоположных ребер треугольной пирамиды, если эта пирамида: а) неправильная; б) правильная; в) является правильным тетраэдром.

2.353. ♉ *Отрезок, соединяющий середины противоположных ребер тетраэдра, называется его бимедианой.* Докажите, что сечением правильного тетраэдра плоскостью, перпендикулярной бимедиане тетраэдра и проходящей через ее середину, является квадрат.

2.354. ☺ *Отрезок, соединяющий вершину тетраэдра с центроидом противолежащей грани, называется медианой тетраэдра.* Докажите, что точка пересечения медиан правильного тетраэдра совпадает с точкой пересечения его бимедиан. Эта точка называется *центром правильного тетраэдра.*

2.355. ♉ Докажите, что центры граней правильного октаэдра служат вершинами куба.

2.356. ☺ Ребро куба равно a. Найдите площадь поверхности многогранника, вершинами которого служат центры граней данного куба.

2.357. ♉ Ребро правильного октаэдра равно a. Найдите площадь поверхности многогранника, вершинами которого служат центры граней данного октаэдра.

2.358. ♉ Площадь поверхности правильного октаэдра равна S. Найдите площадь поверхности многогранника, вершинами которого служат центры граней данного октаэдра.

2.359. ☺ Ребро правильного тетраэдра равно a. Найдите площадь поверхности многогранника, вершинами которого служат центры граней данного тетраэдра.

Задания для склеивания многогранников

Нарисуйте развертку многогранника, свойства которого указаны в условии задачи, и склейте из нее этот многогранник. Многогранником является...

2.360. ☺ Правильная треугольная пирамида с плоским углом при вершине 45° и ребром основания 10 см.

2.361. ☺ Неправильная треугольная пирамида, все плоские углы при вершине которой прямые, а выходящие из этой вершины ребра равны соответственно 9 см, 12 см, 16 см.

2.362. ☺ Правильная четырехугольная пирамида, все ребра которой равны 10 см.

2.363. ☺ Правильная пятиугольная пирамида с плоским углом 30° при вершине и стороной основания 8 см.

2.364. ☺ Правильная шестиугольная пирамида, все ребра которой равны 8 см.

2.365. ☺ Многогранники, на которые куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$ с ребром 10 см делится сечением, проходящим через прямую B_1C_1 и середину ребра AA_1.

2.366. ☺ Многогранники, на которые куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$ с ребром 10 см делится сечением, проходящим через прямую A_1C_1 и вершину B.

2.367. ☺ Шестигранник $ABCDA_1B_1C_1D_1$, у которого грань $ABCD$ — прямоугольник со сторонами 6 см и 8 см, а ребра AA_1, BB_1, CC_1 и DD_1 перпендикулярны плоскости основания и $AA_1 = 3$ см, $BB_1 = 4$ см, $CC_1 = 7$ см.

2.368. ☺ Выпуклый семигранник $ABCDA_1B_1C_1D_1$, у которого грань $ABCD$ — прямоугольник со сторонами 6 см и 8 см, а ребра AA_1, BB_1, CC_1 и DD_1 перпендикулярны плоскости основания и $AA_1 = 3$ см, $BB_1 = 4$ см, $CC_1 = 7$ см, $DD_1 = 5$ см.

2.369. ☺ Невыпуклый семигранник $ABCDA_1B_1C_1D_1$, у которого грань $ABCD$ — прямоугольник со сторонами 6 см и 8 см, а ребра AA_1, BB_1, CC_1 и DD_1 перпендикулярны плоскости основания и $AA_1 = 3$ см, $BB_1 = 4$ см, $CC_1 = 7$ см, $DD_1 = 5$ см.

2.370. ☺ Шестигранник $ABCDA_1B_1C_1D_1$, у которого грань $ABCD$ — прямоугольник со сторонами $AB = 4$ см и $BC = 8$ см, грань $A_1B_1C_1D_1$ — квадрат со стороной 3 см, а остальные четыре грани — трапеции. (Такой многогранник называют *псевдоусеченной пирамидой.*)

2.371. ☺ Не являющийся усеченной пирамидой шестигранник $ABCDA_1B_1C_1D_1$, все грани которого — трапеции (псевдоусеченная пирамида; размеры выбирает изготовитель).

2.372. ☺ Треугольная пирамида, разверткой которой служит треугольник со сторонами 20 см, 24 см и 28 см.

2.373. ☺ Треугольная пирамида, у которой в основании равнобедренный треугольник с углом 120°, а каждый из двугранных углов при основании равен 60°.

2.374. ☺ Треугольная пирамида, в основании которой равнобедренный треугольник с углом 120°, а все боковые ребра наклонены к плоскости основания под углом 60°.

2.375. ☺ Треугольная пирамида, у которой в основании равнобедренный треугольник с углом при вершине 80°, а каждый из двугранных углов при основании равен 45°.

2.376. ☺ Треугольная пирамида, у которой в основании равнобедренный треугольник с углом при вершине 70°, а все боковые ребра наклонены к плоскости основания под углом 30°.

2.377. ☺ Треугольная пирамида, у которой в основании правильный треугольник, одна из боковых граней перпендикулярна плоскости основания, а две другие составляют с основанием двугранные углы, равные 60°.

2.378. ☺ Треугольная пирамида, у которой в основании правильный треугольник, две боковые грани перпендикулярны плоскости основания, а третья составляет с основанием двугранный угол в 60°.

2.379. ☺ Четырехугольная пирамида, у которой в основании квадрат, два двугранных угла при ребрах основания прямые, а два других двугранных угла при ребрах основания по 60°.

2.380. ☺ Четырехугольная пирамида, у которой в основании ромб с углом 45°, два двугранных угла при ребрах основания прямые, а два других двугранных угла при ребрах основания по 60°. (Два случая.)

2.381. ☺ Четырехугольная пирамида, у которой в основании квадрат, одна из боковых граней является равносторонним треугольником и ее плоскость перпендикулярна плоскости основания.

2.382. ☺ Треугольная пирамида $MABC$, в основании которой прямоугольный треугольник ACB с катетами $AC = 12$ и $BC = 16$. Двугранные углы при ребрах AB и BC равны, а $MA = MB$.

2.383. ☺ Пирамида, у которой в основании лежит трапеция, а две не соседние боковые грани перпендикулярны основанию.

Задачи после главы 2 «Многогранники»

2.384. Найдите площадь боковой поверхности прямоугольного параллелепипеда, если его боковое ребро равно 16 см, площадь основания 300 см^2 и площадь сечения, проведенного через концы трех ребер, выходящих из одной вершины, равна 250 см^2.

2.385. Боковое ребро прямого параллелепипеда равно H. Диагонали смежных боковых граней, выходящие из одной вершины, взаимно перпендикулярны, а их проекции на плоскость основания образуют угол в 120°. Найдите объем параллелепипеда.

2.386. Стороны основания прямого параллелепипеда равны 8 см и 20 см, а площади сечений, проходящих через противоположные стороны верхнего и нижнего оснований, равны соответственно 136 см^2 и 200 см^2. Найдите объем и площадь боковой поверхности параллелепипеда.

2.387. ♉ Основанием наклонного параллелепипеда служит параллелограмм, стороны которого 7 см и 9 см, а одна из диагоналей 14 см. Вершина одного из тупых углов верхнего основания проектируется в точку пересечения диагоналей нижнего основания. Найдите объем параллелепипеда, если его боковое ребро равно 6 см.

2.388. Боковое ребро параллелепипеда наклонено к плоскости основания под углом 60°. Сечение параллелепипеда, проходящее через меньшие диагонали оснований, является прямоугольником, диагональ которого равна 29 см. Найдите объем параллелепипеда, если стороны основания равны 15 см и 24 см и образуют угол в 60°.

2.389. ♉ Основанием наклонного параллелепипеда служит ромб со стороной 25 см и меньшей диагональю 30 см. Диагональное сечение, проходящее через большие диагонали оснований, перпендикулярно основаниям, а меньшая диагональ этого сечения равна 37 см. Найдите объем параллелепипеда, если его боковое ребро равно 13 см.

2.390. Каждое ребро параллелепипеда равно 1 дм. У одной из вершин параллелепипеда все три плоских угла острые, каждый из которых равен 2α. Найдите объем.

2.391. Диагонали прямого параллелепипеда равны 34 см и 50 см, а одна из сторон основания и боковое ребро равны соответственно 28 см и 24 см. Найдите объем.

2.392. Основанием прямого параллелепипеда является ромб. Объем параллелепипеда равен 96 см^3, площадь большего диагонального сечения равна 32 см^2, а площадь сечения, проходящего через большую диагональ одного основания и противоположную вершину второго основания, равна 20 см^2. Найдите площадь боковой поверхности параллелепипеда.

2.393. На диагоналях AB_1 и BC_1 граней параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ взяты точки M и N так, что отрезки MN и A_1C параллельны. Найдите отношение длин этих отрезков.

2.394. ♉ Из точки пересечения диагоналей прямоугольного параллелепипеда диагонали граней, выходящих из одной вершины, «видны» под углами α, β, γ. Докажите, что $\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma = -1$.

2.395. ♉ Дан прямоугольный параллелепипед. Докажите, что сумма квадратов расстояний от произвольной точки пространства до концов любой его диагонали не зависит от выбора диагонали.

2.396. В прямоугольном параллелепипеде диагональ, равная d, образует с плоскостью основания угол φ, а с одной из сторон — угол θ. Найдите площадь боковой поверхности.

2.397. Докажите, что любая плоскость, проходящая через диагональ куба, делит его на две равные части.

2.398. Стороны оснований правильной четырехугольной усеченной пирамиды $ABCDA_1B_1C_1D_1$ равны a и b ($a > b$). Угол между плоскостью основания и плоскостью ABC_1 равен α. Найдите: а) площадь сечения ABC_1D_1; б) площадь сечения пирамиды плоскостью, проходящей через точку пересечения диагоналей пирамиды параллельно ее основаниям.

2.399. ♉ В правильной треугольной пирамиде через сторону основания проведена плоскость перпендикулярно противолежащему боковому ребру. Найдите площадь получившегося сечения, если сторона основания равна a, а высота пирамиды h.

2.400. ♉ Сторона основания правильной четырехугольной пирамиды равна a. Сечение, проведенное через одну из вершин основания перпендикулярно противолежащему боковому ребру, делит его пополам. Найдите площадь сечения.

2.401. ♉ Докажите, что если в правильной четырехугольной пирамиде плоский угол при вершине равен 60°, то двугранный угол при боковом ребре вдвое больше двугранного угла между боковой гранью и основанием пирамиды.

2.402. ♉ На продолжении ребра PK за точку K правильной четырехугольной пирамиды $PKLMN$ с вершиной P взята точка A так, что расстояние от точки A плоскости MNP равно 24. Найдите длину отрезка KA, если $PL = 2\sqrt{41}$, $MN = 16$.

2.403. ♉ Всегда ли верно утверждение, что если в основании треугольной пирамиды лежит правильный треугольник и боковые грани образуют с плоскостью основания равные двугранные углы, то эта пирамида — правильная?

Глава 3

ФИГУРЫ ВРАЩЕНИЯ

Задачи к 16, 17.1, 17.2. Фигуры вращения. Определение цилиндра вращения и его элементов. Свойства цилиндра

3.001. ☺ (*Устно.*) Имеет ли цилиндр: а) центр симметрии; б) ось симметрии; в) плоскость симметрии? Найдите их.

3.002. ☺ (*Устно.*) Радиус основания цилиндра 2 м, высота 3 м. Найдите диагональ осевого сечения.

3.003. ☺ (*Устно.*) Площадь осевого сечения равностороннего цилиндра равна Q. Найдите площадь основания.

3.004. ☺ (*Устно.*) Высота цилиндра 6 см, радиус основания 5 см. Найдите площадь сечения, проведенного параллельно оси цилиндра на расстоянии 4 см от нее.

3.005. ☺ (*Устно.*) Высота цилиндра 8 дм, радиус основания 5 дм. Цилиндр пересечен плоскостью параллельно его оси так, что в сечении получается квадрат. Найдите расстояние этого сечения от оси.

3.006. ☺ (*Устно.*) Равны ли два цилиндра, если равны их: а) осевые сечения; б) развертки боковых поверхностей?

3.007. Диагональ осевого сечения цилиндра равна 48 см, а угол между этой диагональю и осью цилиндра равен 60°. Найдите: а) высоту цилиндра; б) радиус основания цилиндра; в) площадь основания цилиндра.

3.008. ☺ В цилиндре проведена параллельно его оси плоскость, отсекающая от окружности основания дугу в 120°. Длина оси 10 см, ее расстояние от секущей плоскости 2 см. Найдите площадь сечения.

3.009. Высота цилиндра равна 10 дм. Площадь сечения цилиндра плоскостью, параллельной оси цилиндра, равна 240 дм^2. Найдите радиус цилиндра, если секущая плоскость удалена на 9 дм от его оси.

3.010. ☺ Концы отрезка AB лежат на окружностях оснований цилиндра. Радиус цилиндра равен R, его высота — h, а расстояние между прямой AB и осью цилиндра равно d. Найдите: а) d, если $h = 6$ дм, $R = 5$ дм, $AB = 10$ дм; б) h, если $AB = 13$ см, $R = 10$ см, $d = 8$ см.

3.011. Через образующую цилиндра проведены две секущие плоскости, угол между которыми равен φ. Одна из плоскостей прохо́дит через ось цилиндра. Найдите отношение площадей сечений цилиндра этими плоскостями.

3.012. ☺ Плоскость α пересекает плоскости оснований цилиндра по прямым, которые касаются оснований цилиндра в точках A и B. Найдите длину отрезка AB, если радиус основания цилиндра равен R, а высота H.

3.013. Плоскость α пересекает основания цилиндра по хордам, длины которых 16 см и 12 см. Найдите тангенс угла между плоскостью α и плоскостью основания цилиндра, если радиус цилиндра равен 10 см, а высота 30 см.

3.014. ☺ Радиус основания цилиндра R, высота H, площадь сечения, параллельного оси цилиндра, равна Q. Найдите расстояние от оси цилиндра до секущей плоскости.

3.015. Площадь основания цилиндра относится к площади осевого сечения, как $\pi : 4$. Найдите угол между диагоналями осевого сечения.

3.016. Высота цилиндра равна H. Найдите площадь сечения цилиндра плоскостью, параллельной оси цилиндра и удаленной от нее на расстояние d, если площадь осевого сечения равна Q.

3.017. ♉ Высота цилиндра 6 дм, радиус основания 5 дм. Концы отрезка AB лежат на окружностях обоих оснований, а его длина равна 10 дм. Найдите кратчайшее расстояние от этого отрезка до оси цилиндра.

3.018. ♉ Высота цилиндра 2 м, радиус основания 7 м. В этот цилиндр наклонно к оси вписан квадрат так, что все вершины его находятся на окружностях оснований. Найдите сторону квадрата.

3.019. ☺ Через образующую цилиндра проведены две взаимно перпендикулярные плоскости. Площадь каждого из полученных сечений равна Q. Найдите площадь осевого сечения.

Задачи к 17.3. Развертка и площадь поверхности цилиндра

3.020. Найдите площадь боковой поверхности цилиндра, если площадь его осевого сечения равна Q.

3.021. ☺ Разверткой боковой поверхности цилиндра служит прямоугольник со сторонами 8 и 3. Найдите образующую и радиус основания цилиндра, если известно, что этот радиус больше 1.

3.022. Площадь полной поверхности цилиндра равна 288π см^2. Найдите высоту и радиус основания цилиндра, если известно, что высота на 12 см больше радиуса.

3.023. Угол между диагоналями развертки боковой поверхности цилиндра равен φ. Найдите площади боковой и полной поверхностей цилиндра, если диагональ развертки равна a.

3.024. Угол между образующей цилиндра и диагональю осевого сечения равен φ. Найдите площадь боковой поверхности цилиндра, если площадь его основания равна Q.

3.025. ☺ (*Устно.*) Площадь боковой поверхности цилиндра равна Q. Найдите площадь осевого сечения.

3.026. ☺ Диагональ развертки боковой поверхности цилиндра равна a и образует угол φ с основанием развертки. Найдите: а) площадь полной поверхности цилиндра; б) угол φ, при котором площадь полной поверхности цилиндра наибольшая.

3.027. ☺ Один цилиндр получен вращением в пространстве прямоугольника $ABCD$ вокруг прямой AB, а другой — вращением того же прямоугольника вокруг прямой BC. а) Докажите, что площади боковых поверхностей этих цилиндров равны. б) Найдите отношение площадей полных поверхностей цилиндров, если $AB = a$, $BC = b$.

3.028. ☺ Отрезки AB и A_1B_1 являются параллельными диаметрами оснований цилиндра с высотой 6. Точка K лежит на дуге AB основания и делит ее в отношении $1:2$, считая от точки A. Прямая B_1K образует угол в 45° с плоскостью основания цилиндра. Найдите: а) площадь боковой поверхности цилиндра; б) длину кратчайшего пути из точки K в точку B_1 по поверхности цилиндра; в) расстояние между прямой B_1K и осью цилиндра.

Задачи к 17.4. Призмы, вписанные в цилиндр и описанные около цилиндра

3.029. Диагональ осевого сечения равностороннего цилиндра равна $a\sqrt{2}$. Найдите площади боковой и полной поверхностей правильной призмы, вписанной в этот цилиндр, если призма: а) треугольная; б) четырехугольная; в) шестиугольная.

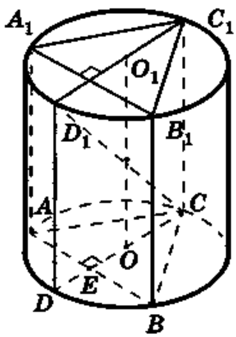


Рис. 18

Решение. Рассмотрим случай а). Пусть в равносторонний цилиндр вписана правильная призма $ABCA_1B_1C_1$ (рис. 18); CDD_1C_1 — осевое сечение; $OO_1 = h$ — высота цилиндра; $OC = R$ — радиус основания цилиндра.

Так как цилиндр — равносторонний, то CDD_1C_1 — квадрат, значит, высота цилиндра равна диаметру его основания. Тогда в квадрате CDD_1C_1 находим $CD = \frac{CD_1}{\sqrt{2}} = a = h$.

Далее, $\triangle ABC$ — правильный, вписанный в основание, радиус которого $R = \frac{CD}{2} = \frac{a}{2}$. Значит, сторона AB и высота CE этого треугольника равны: $AB = R\sqrt{3} = \frac{a\sqrt{3}}{2}$, $CE = \frac{3}{2}R = \frac{3}{4}a$. Откуда $S_{осн} = \frac{AB^2\sqrt{3}}{4} = \frac{3\sqrt{3}a^2}{16}$; $S_{бок} = 3S_{ABB_1A_1} = 3AB \cdot BB_1 = 3 \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} \cdot a = \frac{3\sqrt{3}a^2}{2}$. Тогда $S_{полн} = S_{бок} + 2S_{осн} = \frac{3\sqrt{3}a^2}{2} + 2 \cdot \frac{3\sqrt{3}a^2}{16} = \frac{15\sqrt{3}a^2}{8}$.

Аналогично рассматриваются случаи б) и в).

Ответ: а) $\frac{3\sqrt{3}a^2}{2}$; $\frac{15\sqrt{3}a^2}{8}$; б) $2\sqrt{2}\,a^2$; $(1 + 2\sqrt{2})\,a^2$; в) $3a^2$; $\frac{3}{4}(4 + \sqrt{3})\,a^2$.

3.030. а) Изобразите вписанную в цилиндр призму, если: 1) эта призма правильная треугольная; 2) эта призма правильная четырехугольная; 3) в основании этой призмы равнобедренный прямоугольный треугольник. Для каждого из указанных случаев найдите отношение площади боковой поверхности призмы к площади боковой поверхности цилиндра.

б) Изобразите описанную около цилиндра призму, если: 1) эта призма правильная треугольная; 2) эта призма правильная четырехугольная; 3) в основании этой призмы равнобедренный прямоугольный треугольник.

Для каждого из указанных случаев найдите отношение площади боковой поверхности призмы к площади боковой поверхности цилиндра.

3.031. В цилиндр, площадь боковой поверхности которого равна Q, вписана правильная n-угольная призма и около этого цилиндра описана правильная n-угольная призма. а) Найдите площади боковых поверхностей каждой из этих призм. б) Вычислите, используя микрокалькулятор, отношение площадей поверхности вписанной и описанной призм при $n = 100$; $n = 1000$; $n = 1\,000\,000$.

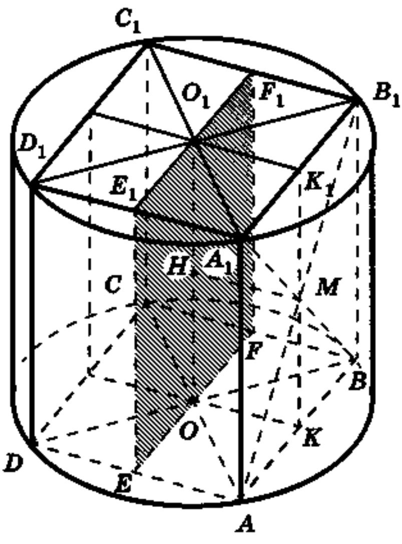


Рис. 19

3.032. ☺ В равносторонний цилиндр, высота которого равна a, вписана правильная призма. Найдите расстояние и угол между диагональю боковой грани призмы и осью цилиндра, если призма: а) треугольная; б) четырехугольная; в) шестиугольная.

Решение. б) $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — вписанная в цилиндр правильная призма (рис. 19). Найдем расстояние и угол между осью OO_1 цилиндра и скрещивающейся с ней (почему?) диагональю AB_1, боковой грани ABB_1A_1 данной призмы.

Расстояние между скрещивающимися прямыми равно расстоянию между параллельными плоскостями, проведенными через эти прямые.

Если E — середина AD, то расстояние между скрещивающимися прямыми AB_1 и OO_1 равно расстоянию между плоскостью грани ABB_1A_1 и параллельной ей (почему?) плоскостью сечения EFF_1E_1. Это расстояние равно длине отрезка OK (где K — середина AB), так как $OK \perp (ABB_1)$ и $(ABB_1) \| (EFF_1)$.

Поскольку данный цилиндр — равносторонний, то BDD_1B_1 — квадрат со стороной $BD = BB_1 = a$. Тогда $AB = \frac{BD}{\sqrt{2}} = \frac{a}{\sqrt{2}}$. Значит,

$OK = AE = \frac{AD}{2} = \frac{a\sqrt{2}}{4}$ — искомое расстояние между прямыми OO_1 и AB_1.

Обозначим $\angle(OO_1; AB_1) = \varphi$, $M = AB_1 \cap A_1B$. Для нахождения угла φ проведем в грани ABB_1A_1 прямую $KK_1 \| OO_1$. Тогда $\varphi = \angle(OO_1; AB_1) = \angle(KK_1; AB_1)$. Так как $KK_1 \| OO_1$, $OO_1 \perp (ABC)$, то $MK \perp AB$. Поэтому $\triangle AKM$ — прямоугольный. В этом треугольнике $AK = \frac{a\sqrt{2}}{4}$, $KM = \frac{a}{2}$. Значит, $\operatorname{tg} \varphi = \frac{AK}{KM} = \frac{\sqrt{2}}{2}$, откуда

$\varphi = \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Ответ: б) $\frac{a\sqrt{2}}{4}$; $\operatorname{arctg} \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Случаи а) и в) рассмотрите самостоятельно.

Задачи к 17.5. Объем цилиндра

3.033. ☺ (*Устно.*) Найдите радиус основания цилиндра, объем которого равен 36π см^3, площадь боковой поверхности 9π см^2.

3.034. ☺ (*Устно.*) Найдите объем цилиндра, вписанного в правильную шестиугольную призму, каждое ребро которой равно a.

3.035. Центры O_1 и O_2 оснований цилиндра имеют координаты (0; 0; 0) и (2; 0; 0), а одна из точек окружности основания с центром O_1 имеет координаты (3; 0; 4). Найдите объем цилиндра.

3.036. ☺ В цилиндр вписана правильная треугольная призма, а в нее цилиндр. Найдите отношение объемов этих цилиндров.

3.037. ☺ В цилиндр вписана призма, основанием которой является прямоугольный треугольник с катетом a и углом α, прилежащим к этому катету. Найдите объем цилиндра, если высота призмы H.

3.038. ☺ Площадь полной поверхности цилиндра равна 320π см^2, а площадь осевого сечения 192 см^2. Найдите объем цилиндра.

3.039. ♉ В цилиндр вписана правильная треугольная призма, в которую вписан другой цилиндр; разность площадей боковых поверхностей этих цилиндров равна $40\sqrt{3}\pi$ см^2. Найдите разность объемов цилиндров, если сторона основания призмы равна 24 см.

3.040. ♉ Около правильной четырехугольной пирамиды, каждое ребро которой равно a, описан цилиндр так, что все вершины пирамиды находятся на окружностях оснований цилиндра. Найдите объем и площадь боковой поверхности цилиндра.

3.041. ♉ Из множества цилиндров, периметры осевых сечений которых равны $2p$, найдите объем цилиндра, имеющего наибольшую боковую поверхность.

Задачи к 18.1—18.5. Определение конуса и его элементов. Сечения конуса. Касательная плоскость к конусу. Изображение конуса. Развертка и площадь поверхности конуса

3.042. ☺ (*Устно.*) Радиус основания конуса 4 м, высота 3 м. Найдите: а) образующую; б) площадь боковой поверхности конуса.

3.043. ☺ (*Устно.*) Образующая l конуса наклонена к плоскости основания под углом в 60°. Найдите: а) радиус основания; б) высоту конуса; в) площадь боковой поверхности конуса.

3.044. ☺ (*Устно.*) Радиус основания конуса R. Осевым сечением служит прямоугольный треугольник. Найдите площадь его поверхности.

3.045. ☺ Отношение площади основания конуса к площади осевого сечения равно π. Найдите угол наклона образующей к основанию.

3.046. Угол при вершине осевого сечения конуса равен α, а радиус основания конуса r. Найдите площадь полной поверхности конуса.

3.047. Высота конуса равна радиусу R его основания. Через вершину конуса проведена плоскость, отсекающая от окружности основания дугу: а) в 60°; б) в 90°. Найдите площадь сечения.

Решение. а) Пусть плоскость α пересекает поверхность конуса с вершиной P по образующим PA и PB (рис. 20); $\triangle ABP$ — искомое сечение. Найдем площадь этого сечения.

Хорда AB окружности основания стягивает дугу в $60°$, значит, $\triangle AOB$ — правильный и $AB = R$.

Если точка C — середина стороны AB, то PC — высота треугольника ABP. Поэтому $S_{\triangle ABP} = \frac{1}{2}AB \cdot PC$. Имеем $OP = R$ (по условию); в $\triangle AOB$: $OC = \frac{R\sqrt{3}}{2}$; в $\triangle OCP$: $CP = \sqrt{OC^2 + OP^2} = \frac{R\sqrt{7}}{2}$. Тогда $S_{\triangle ABP} = \frac{1}{2}AB \cdot PC = \frac{R^2\sqrt{7}}{4}$.

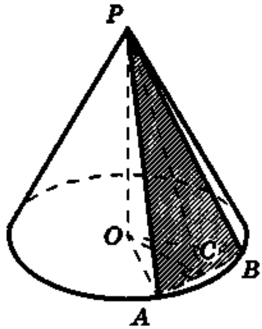


Рис. 20

Ответ: а) $\frac{R^2\sqrt{7}}{4}$.

Случай б) рассмотрите самостоятельно.

3.048. ☺ Одна из образующих конуса принадлежит плоскости, не имеющей с конусом общих внутренних точек. На каком наибольшем расстоянии от плоскости находятся точки конуса, если образующая конуса 13, а радиус основания 5?

3.049. Образующая конуса 13 см, высота 12 см. Этот конус пересечен прямой, параллельной основанию; расстояние ее от основания равно 6 см, а от высоты — 2 см. Найдите длину отрезка этой прямой, заключенного внутри конуса.

3.050. ☺ Высота конуса 20, радиус его основания 25. Найдите площадь сечения, проведенного через вершину конуса, если расстояние от центра основания конуса до секущей плоскости равно 12.

3.051. ☺ Радиус основания равностороннего конуса равен a. Найдите площадь сечения, проведенного через две образующие, угол между которыми равен: а) $30°$; б) $45°$.

3.052. ☺ Через вершину конуса и хорду, стягивающую дугу в $120°$, проведено сечение, составляющее с плоскостью основания угол в $45°$. Найдите площадь сечения, если радиус основания равен 4 см.

3.053. Радиус основания конуса равен R, а образующая наклонена к плоскости основания под углом α. Через вершину конуса проведена плоскость под углом φ к его высоте. Найдите площадь полученного сечения.

3.054. Угол при вершине осевого сечения конуса равен α. Через его вершину под углом β $\left(\beta < \frac{\alpha}{2}\right)$ к оси проведена плоскость. Найдите угол между двумя образующими конуса, по которым проведенная плоскость пересекает его поверхность.

3.055. ♉ Через две образующие конуса, угол между которыми равен α, проведена плоскость. Площадь сечения относится к площади полной поверхности конуса как $2 : \pi$. Найдите угол между образующей и высотой конуса.

3.056. Высота конуса 4, радиус 3; боковая поверхность конуса развернута на плоскость. Найдите угол полученного сектора.

3.057. Радиус кругового сектора равен 3 м, его угол 120°. Сектор свернут в боковую поверхность конуса. Найдите радиус основания конуса.

3.058. Образующая конуса составляет с плоскостью основания угол в 60°. Найдите дугу сектора, представляющего собой развертку боковой поверхности этого конуса.

3.059. ☺ Найдите угол при вершине осевого сечения конуса, если разверткой его боковой поверхности является сектор с дугой, равной 90°, 60°.

3.060. Наибольший угол между образующими конуса равен 60°. Найдите отношение площади боковой поверхности конуса к площади его основания.

3.061. ♉ По радиусу R основания и образующей l конуса определите угол в развертке его боковой поверхности.

3.062. ♉ Полукруг свернут в боковую поверхность конуса. Найдите угол между образующей и осью конуса.

3.063. Разверткой боковой поверхности конуса служит сектор MPK, длина дуги PK равна 6. Найдите радиус основания конуса.

3.064. ♉ Из прямоугольника $ABCD$ вырезана развертка полной поверхности конуса. Образующая конуса равна CD, угол в развертке 90°. Какое наименьшее значение может принимать отношение AD к CD?

3.065. ☺ Как относятся между собой площади основания, боковой и полной поверхностей равностороннего конуса?

3.066. Даны равносторонний конус и равносторонний цилиндр с равными высотами. Найдите отношение площадей их боковых поверхностей.

3.067. ♉ Плоскость проходит через две взаимно перпендикулярные образующие конуса и составляет угол α с высотой конуса, равной h. Найдите: а) радиус основания конуса; б) центральный угол в развертке боковой поверхности конуса.

3.068. ♉ Равнобедренный треугольник вращается вокруг своей высоты. Найдите стороны этого треугольника, если его периметр равен 30 см, а площадь полной поверхности тела вращения равна 60 см^2.

3.069. ♉ Равнобедренная трапеция вращается вокруг большего основания. Найдите площадь поверхности полученного тела, если основания трапеции равны 6 см и 10 см, а острый угол равен 60°.

Задачи к 18.6—18.9. Свойства параллельных сечений конуса. Вписанные в конус и описанные около конуса пирамиды. Усеченный конус. Поверхность усеченного конуса

3.070. ☺ (*Устно.*) Высота конуса H. На каком расстоянии от вершины проведена плоскость параллельно основанию, если площадь сечения меньше площади основания: а) в два раза; б) в три раза; в) в четыре раза?

3.071. ☺ (*Устно.*) Радиус основания конуса R. Найдите площадь сечения конуса плоскостью, параллельной основанию, если эта плоскость: а) проходит через середину высоты; б) делит высоту в отношении $2 : 3$ (считая от вершины); в) делит высоту в отношении $m : n$ (считая от вершины).

3.072. ☺ (*Устно.*) Радиусы оснований усеченного конуса 3 м и 6 м, а высота 4 м. Найдите: а) образующую; б) площадь боковой поверхности усеченного конуса.

3.073. ☺ (*Устно.*) Раднусы оснований усеченного конуса R и r ($R > r$), образующая наклонена к плоскости основания под углом 45°. Найдите: а) высоту; б) образующую; в) площадь поверхности усеченного конуса.

3.074. ☺ (*Устно.*) Радиусы оснований усеченного конуса R и r, образующая наклонена к плоскости основания под углом 60°. Найдите площадь боковой поверхности.

3.075. В усеченном конусе диагонали осевого сечения взаимно перпендикулярны. Одно из оснований этого сечения равно 40 см, а его площадь — 36 дм^2. Найдите площади боковой и полной поверхностей усеченного конуса.

3.076. ☺ Площади оснований усеченного конуса 4 м^2 и 16 м^2. Через середину высоты проведена плоскость параллельно основанию. Найдите площадь сечения.

3.077. Найдите площадь осевого сечения усеченного конуса, если его высота H, образующая l и площадь боковой поверхности Q.

3.078. ☺ Трапеция $ABCD$, в которой $CD = 4$ см, $BC = 3$ см, $\angle A = 90°$, $\angle B = 45°$, вращается вокруг стороны AD. Найдите площади боковой и полной поверхностей усеченного конуса, образованного при этом вращении.

3.079. ♉ В усеченном конусе проведены диагонали всех осевых сечений. Диагонали каждого осевого сечения взаимно перпендикулярны, равны d и делят друг друга в отношении 1 : 3. Найдите: а) площадь поверхности, образованной всеми диагоналями; б) площадь сечения усеченного конуса плоскостью, параллельной его основаниям и делящей боковую поверхность на две части равной площади.

3.080. В равносторонний конус вписана правильная пирамида. Найдите отношение площадей боковых поверхностей пирамиды и конуса, если пирамида: а) треугольная; б) четырехугольная; в) шестиугольная.

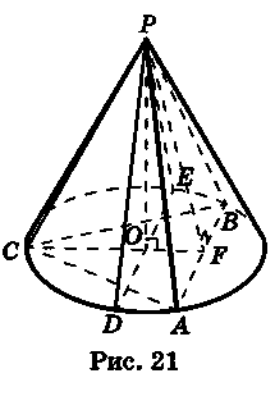


Рис. 21

Решение. а) Пусть R — радиус основания равностороннего конуса, $PABC$ — правильная пирамида, вписанная в этот конус (рис. 21); $\triangle DPE$ — осевое сечение конуса, CF — медиана $\triangle ABC$. Тогда в $\triangle ABC$ (правильный): $AB = R\sqrt{3}$, $OF = \frac{1}{2}R$; в $\triangle DPE$ (правильный): $OP = \frac{DE\sqrt{3}}{2} =$

$= R\sqrt{3}$, в $\triangle OPF$ ($\angle FOP = 90°$, $DE = 2R$): $PF = \sqrt{OF^2 + OP^2} =$
$= \frac{R\sqrt{13}}{2}$.

Так как CF — медиана $\triangle ABC$, то PF — высота равнобедренного треугольника ABP. Поэтому $S_{\triangle ABP} = \frac{1}{2}AB \cdot PF =$
$= \frac{1}{2}R\sqrt{3} \cdot \frac{R\sqrt{13}}{2} = \frac{R^2\sqrt{39}}{4}$.

Обозначим: S_1 — площадь боковой поверхности пирамиды, S_2 — площадь боковой поверхности конуса. Тогда

$$S_1 = 3S_{\triangle ABP} = \frac{3R^2\sqrt{39}}{4},$$
$$S_2 = \pi R \cdot PA = \pi R \cdot 2R = 2\pi R^2.$$

Следовательно, $S_1 : S_2 = \frac{3R^2\sqrt{39}}{4} : 2\pi R^2 = \frac{3\sqrt{39}}{8\pi}$.

Ответ: а) $\frac{3\sqrt{39}}{8\pi}$.

Случаи б) и в) рассмотрите самостоятельно.

3.081. ☺ Высота конуса 4 см, а радиус основания 3 см. Найдите площадь полной поверхности правильной n-угольной пирамиды, вписанной в конус, если: а) $n = 3$; б) $n = 4$; в) $n = 6$.

3.082. ♉ Дан конус, у которого радиус основания $R = 39$ см, а высота $H = 52$ см. В него вписан цилиндр такой высоты, что его боковая поверхность равновелика боковой поверхности малого конуса, стоящего на верхнем основании цилиндра. Найдите высоту цилиндра.

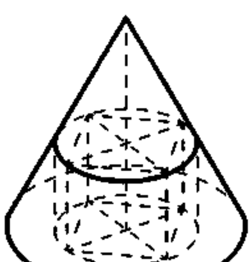


Рис. 22

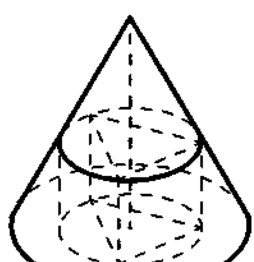


Рис. 23

3.083. В конусе радиус основания R и высота H. Найдите: а) ребро вписанного в него куба (рис. 22); б) ребро правильной треугольной призмы, вписанной в этот конус, если боковые грани призмы — квадраты (рис. 23).

Задачи к 18.10. Объем конуса и усеченного конуса

3.084. ☺ (*Устно.*) Высота конуса в два раза больше радиуса его основания. Найдите объем конуса, если высота его равна H.

3.085. Образующая конуса равна 13 см, а площадь его осевого сечения 60 см^2. Найдите объем этого конуса.

3.086. ☺ Докажите, что объем конуса равен одной шестой произведения площади осевого сечения на длину окружности основания.

3.087. Около конуса описана треугольная пирамида, площадь полной поверхности которой равна 189 см^2, а боковой — 105 см^2. Площадь боковой поверхности конуса равна 20π см^2. Найдите объем конуса.

3.088. ☺ Конус, радиус основания которого равен 12 см, и цилиндр радиусом 10 см имеют общую высоту и равновеликие боковые поверхности. Найдите объем цилиндра.

3.089. Радиусы оснований усеченного конуса равны 3 м и 6 м, а образующая равна 5 м. Найдите объем усеченного конуса.

3.090. ☺ Радиусы оснований усеченного конуса R и r ($R > r$), образующая наклонена к плоскости основания под углом в 45°. Найдите объем.

3.091. ☺ Треугольник со сторонами 13 см, 37 см и 40 см вращается вокруг прямой, проходящей через вершину большего угла параллельно большей стороне. Найдите объем и площадь поверхности тела вращения.

3.092. ♉ Прямоугольный треугольник вращается вокруг гипотенузы, равной 25 см. Найдите площадь поверхности тела вращения, если его объем равен 1200π см^3.

3.093. ☺ Найдите объем усеченного конуса, площадь боковой поверхности которого равна 117π см^2, образующая 13 см, а диагональ осевого сечения 15 см.

3.094. ♉ Ромб со стороной a и острым углом в 30° вращается вокруг одной из своих сторон. Найдите объем тела вращения.

3.095. ☺ Развертка боковой поверхности конуса представляет собой круговой сектор с углом в 60°. Найдите объем этого конуса, если площадь его полной поверхности равна 45π дм^2.

3.096. ♉ Найдите объем и площадь поверхности тела, полученного при вращении треугольника со сторонами 6 см, 25 см и 29 см вокруг прямой, проходящей через вершину меньшего угла треугольника параллельно меньшей его стороне.

3.097. Радиусы оснований усеченного конуса равны 3 см и 21 см, а его образующая 30 см. Плоскость, параллельная основаниям, делит боковую поверхность конуса на равновеликие части. Найдите отношение объемов полученных усеченных конусов.

3.098. ♉ Цилиндр радиуса 20 см и конус радиуса 24 см имеют равновеликие боковые поверхности, равные высоты и расположены так, что высота цилиндра, проходящая по его оси, совпадает с высотой конуса. Найдите объем и площадь боковой поверхности усеченного конуса, который отсекается от конуса плоскостью, проходящей через линию пересечения боковых поверхностей цилиндра и конуса.

3.099. ☺ Треугольник со сторонами 13 см, 37 см и 40 см вращается вокруг прямой, параллельной большей стороне треугольника и отстоящей от нее на 3 см (ось вращения лежит в плоскости треугольника). Найдите объем и площадь поверхности тела вращения.

3.100. ☺ Прямоугольный треугольник с гипотенузой 6 и острым углом 15° вращается вокруг прямой, содержащей гипотенузу. Найдите объем тела вращения.

3.101. ♉ Трапеция со сторонами 2, 2, 2 и 4 вращается вокруг прямой, лежащей в плоскости трапеции и проходящей через одну из вершин нижнего основания перпендикулярно этому основанию. Найдите объем тела вращения.

3.102. ☺ Высота конуса разделена на 3 равные части и через точки деления проведены плоскости, параллельные основанию. Объем меньшего из получившихся усеченных конусов равен 21 м^3. Найдите объем данного конуса.

Задачи к 19.1, 19.2. Определение шара, сферы и их элементов. Изображение сферы

3.103. ☺ Найдите множество центров всех сфер, проходящих через две данные точки A и B.

3.104. ☺ Найдите множество середин всех хорд данной шаровой поверхности, проведенных параллельно данной прямой AB.

3.105. ☺ Найдите множество центров всех кругов радиуса r, являющихся сечениями данного шара радиуса R.

3.106. Найдите в пространстве множество вершин всех прямых углов, опирающихся на данный отрезок AB.

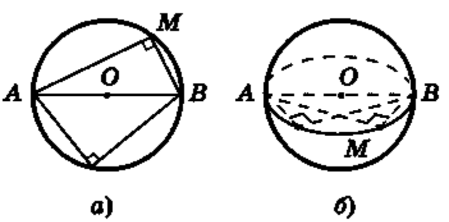


Рис. 24

Решение. Если $\angle AMB = 90°$, то точка M принадлежит окружности с диаметром AB (рис. 24, *а*).

Проведем произвольную плоскость α, содержащую отрезок AB. В этой плоскости множество всех точек M, из каждой из которых отрезок AB виден под прямым углом, представляет собой окружность ω с диаметром AB (точки A и B этой окружности не принадлежат) (рис. 24, *б*). При вращении плоскости α вокруг прямой AB окружность ω будет также вращаться вокруг своего диаметра AB, в результате чего образуется сфера, диаметром которой является отрезок AB. Таким образом, искомое множество вершин прямых углов, опирающихся иа отрезок AB, представляет собой сферу с диаметром AB. Точки A и B этой сфере не принадлежат. (Почему?)

3.107. ☺ Найдите множество центров всех шаров радиуса R, пересекающих данный шар радиуса r по большим кругам.

3.108. ♉ Дан шар с центром A. Найдите множество середин всех хорд, проходящих через данную точку B, расположенную внутри шара.

3.109. Найдите множество центров всех сфер, проходящих через все вершины многоугольника, если этим многоугольником является: а) квадрат; б) прямоугольник; в) правильный треугольник; г) произвольный треугольник.

3.110. ☺ (*Устно.*) Докажите, что: а) центр шара является его центром симметрии; б) любая прямая, проходящая через центр сферы, является осью симметрии сферы; в) любая диаметральная плоскость сферы является ее плоскостью симметрии.

3.111. (*Устно.*) Точки A и B лежат на сфере с центром $O \notin AB$, C — точка отрезка AB. Докажите, что: а) если C — середина отрезка AB, то $OC \perp AB$; б) если $OC \perp AB$, то C — середина отрезка AB.

3.112. (*Устно.*) Точка C — середина отрезка AB, концы которого лежат на сфере с центром O и радиусом R. Найдите: а) OC, если $AB = 40$ см, $R = 60$ см; б) OC, если $AB = 24$ см, $R = 2$ дм; в) AB, если $R = 10$ дм, $OC = 60$ см; г) AC, если $R = a$, $OC = b$.

Задачи к 19.3. Уравнение сферы

3.113. ☺ Центр шара имеет координаты $(3; 2; -1)$, а одна из точек на поверхности шара — координаты $(1; 0; 0)$. Найдите диаметр шара.

3.114. ☺ (*Устно.*) Составьте уравнение сферы радиуса R с центром A, если: а) $A(0; 0; 0)$, $R = \sqrt{3}$; б) $A(-2; 4; 3)$, $R = 7$; в) $A(-2; 0; 3)$, $R = \sqrt{5}$.

3.115. ☺ (*Устно.*) Найдите координаты центра и радиус сферы, заданной уравнением: а) $x^2 + y^2 + z^2 = 9$; б) $(x - 5)^2 + y^2 + (z + 3)^2 = 7$.

3.116. ☺ Найдите координаты центра и радиус сферы, заданной уравнением: а) $x^2 + 4x + y^2 + z^2 = 0$; б) $x^2 + y^2 + z^2 - 6y = 0$; в) $x^2 - 4x + y^2 + z^2 = 3$; г) $x^2 + y^2 + z^2 - 6x + 4y - z = 0{,}75$.

3.117. ☺ Напишите уравнения всех сфер, радиусом которых является отрезок PQ, если $P(-1; 2; 1)$ и $Q(0; 3; 2)$.

3.118. Найдите координаты центра и радиус описанной около тетраэдра сферы, если координаты вершин тетраэдра $(0; 0; 0)$, $(8; 0; 0)$, $(0; -2; 0)$ и $(0; 0; -6)$.

3.119. ♉ Для каждого значения числа a определите, какую фигуру задает уравнение $x^2 + 4x + y^2 - 2y + z^2 = a$.

3.120. ♉ Для каждого значения числа a определите, какую фигуру задает уравнение $x^2 + 2ax + y^2 + z^2 - 4z + 8 = 0$.

3.121. ♉ Найдите длину линии, состоящей из всех общих точек двух сфер $(x - 1)^2 + (y + 3)^2 + (z - 5)^2 = 64$ и $(x + 3)^2 + (y + 6)^2 + (z + 7)^2 = 25$.

3.122. ♉ Напишите уравнение плоскости, в которой лежат все общие точки сфер $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ и $(x - 1)^2 + (y - 2)^2 + (z - 2)^2 = 4$.

3.123. Напишите уравнение плоскости, в которой лежат общие точки сфер $(x - 1)^2 + (y + 2)^2 + (z + 5)^2 = 9$ и $(x - 4)^2 + (y + 6)^2 + (z + 5)^2 = 16$.

3.124. ☺ Найдите точки пересечения осей координат со сферой $(x - 1)^2 + (y + 3)^2 + z^2 = 9$.

3.125. ☺ Найдите длину хорды, высекаемой сферой $(x + 2)^2 + (y - 1)^2 + (z + 3)^2 = 16$ на оси аппликат.

3.126. Напишите уравнение плоскости, касающейся сферы $x^2 + 2x + y^2 + 2y + z^2 - 4z = 0$ в начале координат.

3.127. Напишите уравнение плоскости, касающейся сферы $x^2 - 4x + y^2 + z^2 = 9$ в точке $M(3;\ 2;\ 2)$.

3.128. ♉ Напишите уравнения всех плоскостей, проходящих через ось абсцисс и касающихся сферы $x^2 + (y - 3)^2 + (z - 4)^2 = 16$. Для каждой плоскости укажите координаты точки касания.

3.129. ☺ Напишите уравнение сферы с центром $(1;\ 1;\ 2)$, касающейся сферы $x^2 + y^2 + z^2 = 24$.

3.130. Напишите уравнение сферы с центром $(5;\ 1;\ 1)$, касающейся сферы $x^2 + y^2 + z^2 = 3$.

3.131. ♉ Напишите уравнение сферы, касающейся сфер $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ и $x^2 + y^2 + z^2 = 9$, если центр этой сферы лежит в плоскости $x + y + z\sqrt{2} - 4 = 0$.

3.132. ☺ Найдите множество таких вершин $C(x;\ y;\ z)$ треугольника ABC, что угол C является прямым, если $A(1;\ 2;\ 7)$ и $B(3;\ -4;\ -1)$.

3.133. Найдите множество таких точек $B(x;\ y;\ z)$, что угол ABC является тупым, если $A(3;\ -1;\ 0)$ и $C(1;\ 3;\ 2)$.

3.134. Найдите множество таких точек $K(x;\ y;\ z)$, что угол MKN является острым, если $M(1;\ 2;\ 0)$ и $N(-1;\ -2;\ 4)$.

3.135. ☺ Найдите множество точек, расстояние от которых до сферы $(x-1)^2+y^2+(z+2)^2=9$ равно 2.

3.136. Найдите множество точек пространства, сумма квадратов расстояний которых до вершин треугольника ABC равна 32, если $A(1;\ 2;\ 3)$, $B(0;\ 1;\ 4)$ и $C(1;\ -1;\ 0)$.

3.137. ☺ Определите взаимное расположение прямой

$$\begin{cases} x = 1 - 3t, \\ y = 2 + 2t, \\ z = 4 + t \end{cases}$$

и сферы $x^2+y^2+z^2=25$.

3.138. ☺ Определите взаимное расположение прямой

$$\begin{cases} x = 1 + 3t, \\ y = 5 - 12t, \\ z = 12 + 5t \end{cases}$$

и сферы $(x-1)^2+y^2+z^2=169$.

3.139. Определите взаимное расположение прямой

$$\begin{cases} x = 2 + 3t, \\ y = 7 - t, \\ z = 15 + 9t \end{cases}$$

и сферы $x^2+y^2+z^2=1$.

3.140. ☺ Найдите длину хорды, отсекаемой на прямой

$$\begin{cases} x = 2 + 4t, \\ y = t, \\ z = 1 - 3t \end{cases}$$

сферой $(x-1)^2+(y+2)^2+(z+1)^2=25$.

3.141. Найдите все точки на оси Oz, через которые проходит хотя бы одна прямая, касающаяся сферы $(x-1)^2+(y+2)^2+(z+2)^2=9$ в точке $P(3;\ -1;\ -4)$.

3.142. ♉ Из начала координат проведены всевозможные прямые, касающиеся сферы $(x-4)^2+(y-3)^2+(z-12)^2=144$.

Найдите уравнение плоскости, в которой лежат все точки касания.

3.143. ♉ Найдите уравнения всех сфер с центром в начале координат, касающихся прямой

$$\begin{cases} x = 3 - 2t, \\ y = 1 + t, \\ z = 5. \end{cases}$$

3.144. Напишите уравнения множества центров всех сфер, касающихся всех координатных осей.

3.145. ♉ На сфере $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ найдите точки, расстояния от которых до прямой

$$\begin{cases} x = 3 + t, \\ y = 2 - t, \\ z = 1 - 2t: \end{cases}$$

а) наименьшее; б) наибольшее.

Задачи к 19.4, 19.5. Пересечение шара и сферы плоскостью. Плоскость, касательная к сфере и шару

Сфера и плоскость

3.146. ☺ (*Устно.*) Плоскость проходит через центр сферы и пересекает ее по окружности, длина которой равна 6. Найдите диаметр сферы.

3.147. ☺ (*Устно.*) Найдите длину линии пересечения сферы радиуса 5 и плоскости, удаленной от центра этой сферы на 3.

3.148. ☺ (*Устно.*) Плоскость удалена на 3 от центра сферы радиуса 10. На какое наибольшее расстояние удалены от этой плоскости точки сферы?

3.149. ☺ (*Устно.*) Плоскость удалена от центра сферы радиуса 3 на 10. В каких пределах находится расстояние от этой плоскости до точек сферы?

3.150. ☺ (*Устно.*) Все вершины квадрата со стороной 8 дм принадлежат сфере радиуса 9 дм. На каком расстоянии от центра сферы расположена плоскость квадрата?

3.151. ☺ (*Устно.*) Вершины прямоугольника лежат на сфере радиуса 10 см. Найдите расстояние от центра сферы до плоскости прямоугольника, если его диагональ равна 16 см.

3.152. ☺ (*Устно.*) Все вершины правильного треугольника со стороной 6 дм принадлежат сфере радиуса 8 дм. На каком расстоянии от центра сферы расположена плоскость треугольника?

3.153. ☺ (*Устно.*) Сфера проходит через вершины прямоугольного треугольника с катетами 6 и 8, а центр сферы удален от плоскости этого треугольника на расстояние 12. Найдите радиус сферы.

3.154. ♉ Шар радиуса 3 касается сторон равностороннего треугольника в точках A, B и C. Определите длину кратчайшего пути по поверхности шара от точки A до точки B, если длина стороны данного треугольника равна 6.

3.155. Сфера проходит через вершины равнобедренного треугольника с основанием a и углом при вершине α. Расстояние от центра сферы до плоскости треугольника равно b. Найдите радиус сферы.

3.156. Сфера радиуса 6 касается плоскости треугольника ABC в центре описанной около него окружности. Найдите расстояние от центра сферы до вершин треугольника, если $AB = 3$, $AC = 4$, $BC = 5$.

3.157. ☺ Сфера радиуса 1,5 касается плоскости треугольника ABC в центре вписанной в него окружности. Найдите расстояние от центра сферы до сторон треугольника, если $AB = 6$, $AC = 8$, $BC = 10$.

3.158. Сфера касается трех сторон треугольника со сторонами 5; 5; 8. Найдите радиус сферы, если ее центр лежит в плоскости этого треугольника.

3.159. ☺ Сфера касается трех сторон треугольника со сторонами 5; 5; 8. Найдите радиус сферы, если ее центр удален от плоскости треугольника на 2.

3.160. ☺ (*Устно.*) Шар радиуса 41 дм пересечен плоскостью, находящейся на расстоянии 9 дм от центра. Найдите площадь сечения.

3.161. Через середину радиуса шара проведена перпендикулярная к нему плоскость. Радиус шара равен R. Найдите:

а) площадь получившегося сечения; б) площади боковой и полной поверхностей конуса, основанием которого служит получившееся сечение шара, а вершина — центр шара; в) площади боковой и полной поверхностей правильной треугольной пирамиды, вписанной в этот конус.

Решение. а) Пусть O — центр шара, OD — его радиус, C — середина радиуса OD; α — секущая плоскость, проходящая через точку C перпендикулярно OD.

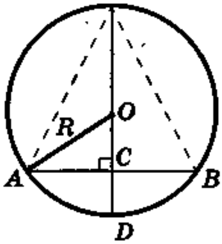


Рис. 25

Рассмотрим сечение шара диаметральной плоскостью, проходящей через его радиус OD. Этим сечением является большой круг с центром O и радиусом R (рис. 25); AB — диаметр круга-сечения данного шара плоскостью α.

Так как $AB \perp OD$ и точка C — середина радиуса OD, то отрезок AB равен стороне правильного треугольника, вписанного в окружность радиуса R, значит, $AB = R\sqrt{3}$, откуда $AC = r = \frac{R\sqrt{3}}{2}$, где r — радиус сечения шара плоскостью α. Тогда площадь этого сечения равна $\pi r^2 = \frac{3\pi R^2}{4}$.

б) Найдем площадь поверхности конуса с вершиной O и радиусом основания $r = \frac{R\sqrt{3}}{2}$.

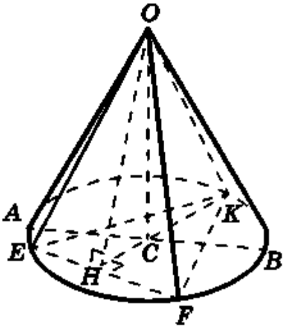


Рис. 26

Образующая OE конуса (рис. 26) равна радиусу R данного шара. Поэтому площадь боковой поверхности этого конуса равна $\pi r \cdot R = \pi \cdot \frac{R\sqrt{3}}{2} \cdot R = \frac{\sqrt{3}\pi R^2}{2}$, а площадь его полной поверхности — $\frac{\sqrt{3}\pi R^2}{2} + \frac{3\pi R^2}{4} = \frac{\sqrt{3}}{4}\pi R^2 \cdot (2 + \sqrt{3})$.

в) Найдем площадь поверхности правильной треугольной пирамиды $OEFK$, вписанной в конус, радиус основания которого $CK = r = \frac{R\sqrt{3}}{2}$; боковое ребро OE пирамиды равно радиусу R данного шара (см. рис. 26).

Так как $\triangle EFK$ — правильный, вписанный в окружность радиуса $r = \frac{R\sqrt{3}}{2}$, то сторона этого треугольника равна $r\sqrt{3}$, т. е. $EF = \frac{3R}{2}$. Тогда $S_{\triangle EFK} = \frac{EF^2\sqrt{3}}{4} = \frac{9\sqrt{3}R^2}{16}$.

Площадь боковой поверхности пирамиды равна $3S_{\triangle EOF} = \frac{3}{2}EF \cdot OH$, где OH — апофема пирамиды. В прямоугольном треугольнике OHF находим

$$OH = \sqrt{OF^2 - HF^2} = \sqrt{R^2 - \frac{9}{16}R^2} = \frac{\sqrt{7}R}{4}.$$

Тогда $\frac{3}{2}\,EF \cdot OH = \frac{9\sqrt{7}R^2}{16}$ — площадь боковой поверхности пирамиды.

Следовательно, площадь полной поверхности пирамиды равна

$$\frac{9\sqrt{3}R^2}{16} + \frac{9\sqrt{7}R^2}{16} = \frac{9}{16}R^2(\sqrt{3} + \sqrt{7}).$$

Ответ: а) $\frac{3\pi R^2}{4}$; б) $\frac{\sqrt{3}}{4}\pi R^2(2 + \sqrt{3})$; в) $\frac{9\sqrt{7}R^2}{16}$; $\frac{9}{16}R^2(\sqrt{3} + \sqrt{7})$.

3.162. Вершины треугольника ABC лежат на сфере радиуса 13 см. Найдите расстояние от центра сферы до плоскости треугольника, если $AB = 6$ см, $BC = 8$ см, $AC = 10$ см.

3.163. ☺ Сфера проходит через три вершины ромба со стороной 6 и углом 60°. Найдите расстояние от центра сферы до четвертой вершины ромба, если радиус сферы 10.

3.164. ♉ Сторона AB параллелограмма $ABCD$ является хордой сферы радиуса 6. Диаметр сферы, проходящий через середину хорды, перпендикулярен диагонали BD параллелограмма. Найдите: расстояние от вершин D и C параллелограмма до ближайшей точки сферы и длину линии пересечения сферической поверхности с параллелограммом, если $AD = BD = 6$, а угол BCD равен 45°.

3.165. ☺ На поверхности шара диаметра 25 см даны точка A и окружность, все точки которой удалены от точки A (по прямой линии) на 15 см. Найдите радиус этой окружности.

3.166. Все стороны ромба с диагоналями 15 и 20 касаются поверхности шара радиуса 10. Найдите расстояние от центра шара до плоскости ромба.

3.167. ☺ Радиус шара 15 дм. Вне шара дана точка A на расстоянии 10 дм от его поверхности. Найдите длину такой окружности на поверхности шара, все точки которой удалены от точки A (по прямой линии) на 20 дм.

3.168. ☺ Диаметр шара равен 18 см. Плоскость, перпендикулярная диаметру, делит его на части в отношении 1 : 2. Найдите площадь сечения шара этой плоскостью.

Сфера и две параллельные плоскости

3.169. ☺ Две параллельные плоскости касаются сферы радиуса 2. Найдите расстояние между плоскостями.

3.170. Расстояние между двумя параллельными плоскостями равно 10. Найдите радиус сферы, касающейся обеих плоскостей.

3.171. Расстояние между двумя параллельными плоскостями равно 12. Центр сферы, касающейся одной из этих плоскостей, удален от другой на 8. Найдите радиус сферы.

3.172. ☺ Центр сферы радиуса r лежит между двумя параллельными плоскостями α и β и удален от них соответственно на 4 и 6. Опишите взаимное расположение сферы относительно плоскостей в зависимости от числового значения r.

3.173. Сфера пересекает две параллельные плоскости по равным окружностям радиуса 3. Найдите радиус сферы, если расстояние между плоскостями равно 8.

3.174. ☺ Концы диаметра сферы лежат на двух параллельных плоскостях. Прямая, содержащая этот диаметр, образует с каждой из плоскостей угол 60°. Найдите радиус сферы и расстояние между плоскостями, если радиус окружности пересечения сферы с одной из них равен 3.

3.175. Две параллельные плоскости пересекают сферу радиуса 5 по окружностям радиусов 3 и 4. Найдите расстояние между плоскостями.

3.176. Две параллельные плоскости пересекают сферу по окружностям радиусов 3,5 и 12,5. Найдите радиус сферы, если расстояние между плоскостями равно 12.

3.177. ♉ В шаре радиуса R проведены два параллельных сечения, диаметр каждого из которых равен радиусу шара. Найдите расстояние между плоскостями этих сечений.

3.178. Шар радиуса 5 касается двух параллельных плоскостей в точках A и B. Через середину отрезка AB проведена прямая, составляющая с прямой AB угол в 60°. Найдите длину отрезка этой прямой, заключенного между данными плоскостями.

3.179. ☺ Сфера касается одной из параллельных плоскостей и пересекает другую по окружности радиуса 4. Найдите радиус сферы, если расстояние между плоскостями равно 8.

3.180. ♉ Две параллельные плоскости пересекают диаметр сферы AB в точках C и K, делящих его в отношении $AC : CK : KB = 1 : 2 : 3$. Найдите отношение радиусов сечений (меньшего к большему), если прямая, содержащая данный диаметр, образует с плоскостями угол α.

Сфера и двугранный угол

3.181. ☺ Сфера радиуса r касается двух взаимно перпендикулярных плоскостей. Найдите: а) расстояние от центра сферы до прямой пересечения этих плоскостей; б) расстояние между точками касания.

3.182. Сфера радиуса r касается граней двугранного угла в 60°. Найдите расстояние от центра сферы до ребра двугранного угла.

3.183. Центр шара, касающегося двух взаимно перпендикулярных плоскостей, удален от общей прямой этих плоскостей на 4. Найдите радиус шара.

3.184. ☺ Расстояние от центра сферы радиуса 6 до прямой a равно 18. Через прямую a проведены две плоскости, касающиеся этой сферы. Найдите величину угла между этими плоскостями.

3.185. Расстояние от центра сферы радиуса 6 до прямой a равно 8. Через прямую a проведены две плоскости, касающиеся этой сферы. Найдите величину угла между этими плоскостями.

3.186. ☺ Сфера радиуса r касается двух взаимно перпендикулярных плоскостей. Найдите радиус наименьшей сферы, касающейся этих плоскостей и данной сферы.

3.187. ☺ Две сферы радиусов 2 и 1 касаются граней прямого двугранного угла и друг друга. Найдите расстояние между проекциями центров этих сфер на ребро двугранного угла.

3.188. ☺ Центр сферы радиуса 5 лежит на ребре двугранного угла. Определите общую длину линии пересечения сферы с гранями двугранного угла.

3.189. Центр шара радиуса R лежит внутри прямого двугранного угла. Шар касается одной из граней этого угла, а диаметр сечения шара плоскостью второй грани равен R. Найдите расстояние от центра шара до ребра двугранного угла.

3.190. На ребре прямого двугранного угла лежит хорда сферы, равная радиусу сферы. Центр сферы лежит внутри двугранного угла и удален от каждой из его граней на 3. Найдите радиус сферы.

3.191. Центр сферы радиуса r лежит на одной из граней двугранного угла, а радиус сечения сферы другой его гранью равен $0{,}5r \cdot \sqrt{3}$. Определите взаимное расположение сферы и ребра двугранного угла, если величина этого угла равна 30°.

3.192. ☺ Сфера радиуса 5 касается одной из граней двугранного угла в 120° и пересекает другую его грань по окружности радиусом 3. Найдите расстояние от центра сферы до ребра двугранного угла.

3.193. ☺ Две окружности имеют две общие точки и не лежат в одной плоскости. Существует ли сфера, содержащая данные окружности?

Сфера и плоскости

3.194. ☺ Докажите, что: а) сечения шара, одинаково удаленные от его центра, имеют равные радиусы; б) из двух сечений шара больший радиус имеет то, плоскость которого ближе к

центру шара; в) линия пересечения двух сфер есть окружность.

3.195. ☺ **В шаре радиуса 13 см проведены два взаимно перпендикулярных сечения на расстоянии 4 см и 12 см от центра шара. Найдите длину их общей хорды.**

3.196. ♉ **В шаре проведены два взаимно перпендикулярных сечения на расстоянии 8 см и 12 см от центра, длина общей хорды которых 18 см. Определите радиус шара.**

3.197. ☺ **Радиус шара 7 см. Две взаимно перпендикулярные плоскости пересекают шар так, что в сечениях получаются два равных круга. Найдите радиусы этих кругов, если их общая хорда равна 2 см.**

3.198. ♉ **Через точку, лежащую на поверхности шара, проведены две взаимно перпендикулярные плоскости, которые пересекают шар по кругам радиусов r_1 и r_2. Найдите радиус R шара.**

3.199. ☺ **Дан шар радиуса R. Через точку M его поверхности проведены две плоскости: первая — касательная к шару, вторая — под углом в 30° к первой. Найдите площадь сечения.**

3.200. **Сфера касается граней двугранного угла в 120°. Найдите расстояние между точками касания и радиус сферы, если расстояние от центра сферы до ребра двугранного угла равно m.**

3.201. ♉ **Через точку поверхности шара радиуса R проведены две плоскости, одна из которых касается сферы, а другая наклонена под углом φ к касательной плоскости. Найдите площадь сечения шара.**

3.202. ☺ **Два прямоугольника лежат в различных плоскостях и имеют общую сторону. Докажите, что все вершины данных прямоугольников лежат на одной сфере.**

3.203. ♉ **Два правильных треугольника лежат в различных плоскостях и имеют общую сторону. Докажите, что все вершины этих треугольников лежат на одной сфере.**

3.204. ♉ **Два правильных треугольника лежат в различных плоскостях и имеют общую сторону. Существует ли сфера, которой касаются все стороны данных треугольников?**

Сфера и три попарно перпендикулярные плоскости

3.205. ☺ Сфера касается каждой из трех попарно перпендикулярных плоскостей. Рассматриваются восемь точек: центр сферы, три проекции центра сферы на данные плоскости, три проекции центра сферы на прямые пересечения плоскостей и общая точка пересечения плоскостей. Докажите, что эти точки являются вершинами куба с ребром, равным радиусу сферы.

3.206. ☺ Сфера радиуса r касается каждой из трех попарно перпендикулярных плоскостей. Найдите расстояние от центра сферы до общей точки этих трех плоскостей.

3.207. ☺ Сфера радиуса r касается каждой из трех попарно перпендикулярных плоскостей. Найдите радиус сферы, касающейся этих трех плоскостей и данной сферы.

3.208. Рассмотрите центры всех сфер радиуса 4, каждая из которых касается трех попарно перпендикулярных плоскостей. Определите, вершинами какого многогранника являются все эти точки и найдите длину наибольшего из определяемых этими точками отрезков.

3.209. На диаметре сферы взята точка, делящая данный диаметр в отношении 1 : 3. Через эту точку проведены три попарно перпендикулярные плоскости, равноудаленные от центра сферы на расстояние 6. Определите радиус сферы и длину линии ее пересечения с одной из плоскостей.

3.210. ♉ Один из концов диаметра сферы является общей точкой трех попарно перпендикулярных плоскостей. Сечения сферы этими плоскостями имеют радиусы r_1, r_2 и r_3. Найдите радиус сферы.

3.211. ♉ Сфера с центром O и радиусом 6 проходит через общую точку A трех попарно перпендикулярных плоскостей. Прямая OA образует с двумя из данных плоскостей углы 30° и 45°. Найдите радиусы сечений сферы каждой из этих трех плоскостей.

Пересекающиеся сфера и куб

3.212. ☺ Вершина A куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ является центром сферы радиуса 2. Найдите длину линии пересечения сферической поверхности с поверхностью куба, если ребро куба 4.

3.213. Середина ребра куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ является центром сферы радиуса 6. Найдите длину линии пересечения сферической поверхности с поверхностью куба, если ребро куба 12.

3.214. ☺ Вершина A куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ является центром сферы радиуса $2\sqrt{2}$. Найдите длину линии пересечения сферической поверхности с поверхностью куба, если ребро куба 2.

3.215. ♉ Середина диагонали куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ является центром сферы радиуса 17. Найдите длину линии пересечения сферической поверхности с поверхностью куба, если ребро куба 30.

3.216. ☺ Найдите радиус сферы, касающейся всех ребер куба с ребром a. Определите расстояние от центра этой сферы до грани, ребра и вершины куба.

3.217. ♉ Шар радиуса R касается всех ребер куба. Найдите радиус шара, касающегося данного шара и плоскостей трех граней куба, имеющих общую вершину.

3.218. ♉ Шар радиуса R проходит через все вершины грани куба и касается противоположной грани. Найдите ребро куба.

3.219. ♉ Шар с центром в точке C_1 проходит через вершины B, D и A_1 куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Найдите длину линии пересечения поверхности шара с гранями куба, если ребро куба равно a.

Пересекающиеся сфера и призма

3.220. Сфера радиуса R касается всех ребер правильной треугольной призмы. Найдите: а) боковое ребро призмы; б) ребро основания призмы.

3.221. ☺ Сфера касается всех ребер правильной призмы. Найдите боковое ребро призмы, если длина ребра ее основания равна m.

3.222. ♉ Сфера касается всех ребер правильной 100-угольной призмы. Найдите длины ребер призмы, если сумма длин всех ребер призмы равна 300.

Пересекающиеся сфера и правильный тетраэдр

3.223. ☺ Вершина A правильного тетраэдра $ABCD$ с ребром $a = \sqrt{1,5}$ является центром сферы, радиус которой равен высоте этого тетраэдра. Найдите длину линии пересечения сферы поверхностью тетраэдра.

3.224. Высота DH правильного тетраэдра $ABCD$ является диаметром сферы. Найдите длину линии пересечения сферы поверхностью тетраэдра, если высота тетраэдра 6.

3.225. ☺ Ребро AB правильного тетраэдра $ABCD$ равно b и является диаметром сферы. Определите радиус сечения этой сферы плоскостью BDC.

3.226. ♉ В правильном тетраэдре $ABCD$ с ребром a высота BK грани BCD является диаметром сферы. Найдите: а) радиус сечения этой сферы гранью ACD; б) радиус сечения этой сферы гранью ABD.

3.227. Ребро AB правильного тетраэдра $ABCD$ равно 6 и является диаметром сферы. а) Определите взаимное расположение этой сферы и ребра CD. б) Найдите длину линии пересечения поверхности сферы с поверхностью тетраэдра.

3.228. ♉ Сфера касается всех ребер правильного тетраэдра с ребром a. Найдите: а) радиус сферы; б) расстояния от центра сферы до вершины, грани и ребра тетраэдра.

3.229. Найдите радиус сферы, касающейся всех ребер основания правильного тетраэдра и проходящей через его вершину, если высота тетраэдра равна h.

Пересекающиеся сфера и пирамида

3.230. В основании пирамиды $MABCD$ лежит ромб $ABCD$ со стороной a и углом BAD в 60°. Боковые ребра MA, MB и MD равны стороне ромба. Найдите: а) радиус сферы, проходящей через точки M, A, B и D; б) расстояние от вершины C до ближайшей точки сферы.

3.231. ☺ Вершина правильной четырехугольной пирамиды, длина ребра основания которой 6, а бокового ребра 8, является центром сферы радиуса 7. Определите: а) радиус сечения сферы плоскостью основания пирамиды; б) взаимное расположение сферы и прямой, содержащей ребро основания пирамиды.

3.232. ♉ Сторона основания правильной четырехугольной пирамиды $MABCD$ равна 6, а боковое ребро — 5. Найдите радиус сферы, проходящей через вершины M, A и B, если центр сферы лежит на плоскости MCD.

3.233. ♉ Сфера касается всех ребер правильной четырехугольной пирамиды с боковым ребром 10 и ребром основания 8. Найдите радиус этой сферы.

Задачи к 19.6. Вписанные и описанные шары и сферы

Шар и сфера, описанные около куба и вписанные в него

3.234. ☺ (*Устно.*) Докажите, что можно описать шар около: а) прямоугольного параллелепипеда; б) правильной призмы; в) прямой треугольной призмы; г) правильной пирамиды; д) правильного тетраэдра. Как найти центр этого шара?

3.235. Найдите радиус сферы, вписанной в куб с ребром a. Определите расстояние от центра этой сферы до грани, ребра и вершины куба.

3.236. ☺ В куб с ребром a вписан шар. Найдите радиус шара, касающегося данного шара и трех граней куба, имеющих общую вершину.

3.237. В куб с ребром a вписан шар. Найдите радиус шара, касающегося данного шара и плоскостей трех граней куба, имеющих общую вершину.

3.238. ♉ В куб с ребром a вписан шар. Найдите наименьший радиус шара, касающегося двух соседних граней куба и данного шара.

3.239. ☺ В куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$ с ребром a помещены два касающихся друг друга шара. Один из них касается трех граней куба, имеющих общую вершину A, а другой — трех граней куба, имеющих общую вершину C_1. Найдите радиусы шаров, если они равны между собой.

3.240. ♉ В куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$ с ребром a помещены два касающихся друг друга шара. Один из них касается трех граней куба, имеющих общую вершину A, а другой — трех граней куба, имеющих общую вершину A_1. Найдите радиусы шаров, если они равны между собой.

3.241. ♉ В куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$ с ребром a помещены два касающихся друг друга шара. Один из них касается трех граней куба, имеющих общую вершину A, а другой — трех граней куба, имеющих общую вершину B_1. Найдите радиусы шаров, если они равны между собой.

3.242. В куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$ с ребром a помещены два касающихся друг друга шара. Один из них касается трех граней куба, имеющих общую вершину A, а другой — трех граней куба, имеющих общую вершину C_1. Найдите радиусы шаров, если они относятся как 2 : 3.

3.243. ♉ В шар радиуса R вписан куб. Найдите радиус шара, касающегося грани куба в точке пересечения ее диагоналей и данного шара (рассмотрите два случая).

3.244. ☺ В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ с ребром a проведено сечение через точки M, N, P, лежащие соответственно на ребрах AA_1, AB, AD на равных расстояниях от A. Найдите площадь этого сечения, если в каждый из двух полученных многогранников можно вписать шар.

3.245. Найдите радиус сферы, описанной около куба с ребром a. Определите расстояние от центра этой сферы до грани, ребра и вершины куба.

3.246. Найдите наименьшее и наибольшее расстояния между двумя точками, одна из которых лежит на сфере, вписанной в куб с ребром a, а другая — на сфере, описанной около этого куба.

3.247. ♉ Сфера радиуса 6 вписана в куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Определите взаимное расположение сферы и плоскости, которая проходит через середины ребер куба, содержащих вершину A.

3.248. Сфера радиуса 3 вписана в куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Определите радиус сечения сферы плоскостью, проходящей через вершину B_1 и середины ребер AB и BC.

3.249. ♉ В полушар вписан куб так, что четыре вершины его нижнего основания лежат на основании полушара, а другие четыре вершины — на сферической поверхности. Найдите объем куба, если радиус основания полушара равен $\sqrt{6}$.

Сфера, описанная около призмы и вписанная в нее

3.250. ☺ Докажите, что, для того чтобы около призмы можно было описать шар, необходимо и достаточно, чтобы призма была прямой и около ее основания можно было описать круг.

3.251. ☺ Докажите, что, для того чтобы в прямую призму можно было вписать шар, необходимо и достаточно, чтобы в ее основание можно было вписать круг, диаметр которого равен боковому ребру этой призмы.

3.252. ☺ В наклонную призму вписан шар. Докажите, что: а) высота призмы равна диаметру этого шара; б) в сечение призматической поверхности, соответствующей данной призме, плоскостью, перпендикулярной ее боковому ребру, можно вписать круг, радиус которого равен радиусу шара.

3.253. Около правильной треугольной призмы, все ребра которой равны d, описан шар. Найдите радиус шара.

3.254. В правильную шестиугольную призму можно вписать шар. Найдите отношение радиуса этого шара к радиусу шара, описанного около призмы.

3.255. ♉ Основанием прямой призмы $ABCDA_1B_1C_1D_1$ является равнобедренная трапеция $ABCD$, у которой $AB = CD$ и острый угол равен 30°. Найдите радиус вписанного в призму шара, если сумма длин всех ребер призмы равна 40.

3.256. Найдите радиус шара, описанного около прямой призмы, основание которой — прямоугольный треугольник с гипотенузой 5, а боковое ребро равно 13.

3.257. ☺ Может ли сфера проходить ровно через семь вершин четырехугольной призмы? (Ответ обоснуйте.)

3.258. ♉ Основанием призмы $ABCDA_1B_1C_1D_1$ служит квадрат $ABCD$ со стороной a; M — середина ребра A_1D_1; O — точка пересечения диагоналей $ABCD$; $MO = h$ — высота призмы. Найдите радиус сферы, проходящей через точки A, B, C, D, A_1, D_1.

3.259. Основанием призмы $ABCDA_1B_1C_1D_1$ служит квадрат $ABCD$ со стороной a; M — середина ребра A_1D_1; O — точка пересечения диагоналей $ABCD$; $MO = h$ — высота призмы. Найдите радиус сферы, проходящей через точки A, B, C, D и касающейся прямой A_1D_1.

3.260. ♉ В правильную треугольную призму вписана сфера радиуса r. Найдите: а) расстояние от центра сферы до плоскости основания призмы; б) расстояние от центра сферы до плоскости боковой грани призмы; в) расстояние от центра сферы до ребра основания призмы; г) боковое ребро призмы; д) высоту призмы; е) ребро основания призмы; ж) расстояние от центра сферы до бокового ребра призмы; з) расстояние от центра сферы до вершины призмы; и) расстояние между центрами вписанной и описанной сфер; к) радиус описанной сферы.

3.261. ☺ Около правильной призмы описана сфера радиуса R. Найдите расстояние от центра сферы до ребра призмы, если длина этого ребра равна b.

3.262. Около правильной призмы описана сфера. Найдите ее радиус, если расстояние от центра сферы до боковой грани призмы равно 4, а длина диагонали этой грани равна 6.

3.263. ♉ Радиус сферы, вписанной в правильную треугольную призму, равен r. Найдите площадь полной поверхности призмы.

3.264. Найдите радиус сферы, вписанной в правильную шестиугольную призму, если сумма длин всех ребер призмы равна $24 + 12\sqrt{3}$.

3.265. Около правильной шестиугольной призмы описана сфера радиуса 5 см. Найдите ребро основания призмы, если ее высота равна 8 см.

3.266. Найдите радиус сферы, описанной около правильной треугольной призмы, если боковое ребро призмы равно 10 м, а радиус окружности, описанной около основания призмы, равен 12 м.

3.267. ☺ Найдите отношение радиуса сферы, описанной около правильной 100-угольной призмы, к радиусу сферы, вписанной в эту призму.

3.268. В наклонную призму вписана сфера радиуса r. Найдите: а) высоту призмы; б) диаметр окружности, вписанной в сечение призмы плоскостью, пересекающей все боковые грани призмы и перпендикулярной к ним.

3.269. Длина бокового ребра призмы равна 8, а радиус вписанной в призму сферы равен 2. Найдите угол наклона бокового ребра к плоскости основания.

3.270. В четырехугольную призму $ABCDA_1B_1C_1D_1$ вписана сфера. Площади граней ABA_1B_1 и CDC_1D_1 соответственно равны 6 и 5. Найдите площадь боковой поверхности призмы.

3.271. Около четырехугольной призмы $ABCDA_1B_1C_1D_1$ описана сфера. Двугранные углы при ребрах AA_1 и BB_1 соответственно равны 60° и 95°. Найдите величины двугранных углов при ребрах CC_1 и DD_1.

3.272. В основании призмы — равнобедренный треугольник, а одна из ее боковых граней — квадрат со стороной 8. Около призмы описана сфера, центр которой лежит в плоскости этого квадрата. Найдите: а) высоту призмы; б) радиус сферы; в) площадь полной поверхности призмы.

3.273. ♉ В прямую призму вписана сфера радиуса r. Периметр основания призмы равен P. Найдите площадь полной поверхности призмы.

3.274. В основании прямой призмы равнобедренный прямоугольный треугольник с гипотенузой 2. Известно, что в призму можно вписать сферу. Найдите расстояние между центрами вписанной и описанной сфер.

3.275. В прямой призме $ABCA_1B_1C_1$ длины всех ребер равны a. Определите: а) радиус описанной сферы; б) радиус сферы, касающейся всех ребер призмы; в) можно ли вписать в эту призму сферу; г) радиус сферы, касающейся четырех граней призмы; д) радиус сферы, касающейся трех граней призмы, содержащих вершину C, если центр сферы лежит на грани AA_1B_1B; е) радиус сечения сферы плоскостью боковой грани, если сфера касается плоскостей оснований призмы и центр сферы равноудален от плоскостей боковых граней; ж) отношение, в котором сфера с центром в середине ребра CC_1, касающаяся грани AA_1B_1B, делит отрезок BC (считая от B); з) радиус сферы с центром на ребре призмы, если эта сфера проходит через четыре вершины призмы.

3.276. В прямой призме $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ длины всех ребер равны a. Определите: а) радиус описанной сферы; б) радиус сферы, касающейся всех ребер призмы; в) можно ли вписать в эту призму сферу; г) радиус сферы, касающейся семи граней призмы.

3.277. ♉ В сферу радиуса 5 вписаны две четырехугольные призмы. Боковые ребра первой в два раза длиннее боковых ребер второй, а ребра ее основания в два раза короче ребер основания второй призмы. Найдите длины ребер каждой из этих призм.

3.278. Правильная n-угольная призма вписана в шар радиуса R. Сторона основания призмы равна a. Найдите высоту призмы при: а) $n = 3$; б) $n = 4$; в) $n = 6$.

3.279. ☺ Радиус сферы равен R. Найдите площадь полной поверхности: а) вписанного в сферу куба; б) вписанной правильной шестиугольной призмы, высота которой равна R; в) вписанного правильного тетраэдра.

3.280. Радиус сферы равен R. Найдите площадь полной поверхности описанного около сферы многогранника, если этим многогранником является: а) куб; б) правильная шестиугольная призма; в) правильный тетраэдр.

3.281. Прямая призма описана около шара радиуса 4 см. Периметр основания призмы равен 42 см. Найдите объем и площадь поверхности призмы.

3.282. ♉ В шар радиуса R вписана правильная четырехугольная призма. Радиус, проведенный к одной из вершин основания призмы, образует с плоскостью боковой грани угол в 30°. Найдите объем призмы.

Шар и правильный тетраэдр (вписанный и описанный)

3.283. В тетраэдр вписан шар радиуса r. Найдите расстояние от центра шара до вершин и до ребер этого тетраэдра, если все ребра тетраэдра равны.

3.284. В каком отношении, считая от вершины, центр вписанной (описанной) в правильный тетраэдр сферы делит высоту тетраэдра?

3.285. Найдите отношение радиуса вписанной в правильный тетраэдр сферы к радиусу описанной около него сферы.

3.286. ☺ В правильный тетраэдр с ребром a вписана сфера. Найдите: а) радиус сферы; б) расстояния от центра сферы до вершины, грани и ребра тетраэдра.

3.287. Около правильного тетраэдра описана сфера радиуса R. Найдите: а) расстояния от центра сферы до вершины, грани и ребра тетраэдра; б) длину ребра тетраэдра.

3.288. ♉ Около правильного тетраэдра с высотой h описана сфера. На каком наибольшем расстоянии от тетраэдра могут находиться точки этой сферы?

3.289. ♉ В каких пределах находится расстояние между точками двух сфер, одна из которых описана около правильного тетраэдра с высотой h, а другая — вписана в него?

3.290. ☺ В правильный тетраэдр вписана сфера радиуса r. Найдите радиус сечения этой сферы плоскостью, перпендикулярной высоте тетраэдра и делящей ее в отношении $2 : 1$, считая от вершины тетраэдра.

3.291. ☺ В правильный тетраэдр $ABCD$ вписана сфера радиуса r. Найдите радиус сечения этой сферы плоскостью, проходящей через середину высоты AH параллельно грани ABC.

3.292. ☺ В правильный тетраэдр $ABCD$ вписана сфера радиуса r. Найдите радиус сферы, касающейся данной и трех граней тетраэдра, выходящих из вершины A.

Сфера, описанная около пирамиды и вписанная в нее

3.293. ☺ Найдите радиус вписанного и радиус описанного шаров для правильной треугольной пирамиды со стороной основания a и высотой h.

3.294. Расстояние от центра вписанной в правильную пирамиду сферы до ребра основания в два раза больше радиуса сферы. Найдите величину двугранного угла при ребре основания пирамиды.

3.295. ☺ Расстояние от центра вписанной в правильную пирамиду сферы до бокового ребра пирамиды в три раза больше радиуса сферы. Найдите косинус двугранного угла при боковом ребре пирамиды.

3.296. ♉ Расстояние от центра описанной около правильной пирамиды сферы до ее основания в два раза меньше радиуса сферы. Найдите угол между боковым ребром и высотой пирамиды.

3.297. ♉ Расстояние от центра описанной около правильной пирамиды сферы до ее боковой грани в три раза меньше радиуса сферы. Найдите косинус угла наклона бокового ребра к плоскости основания пирамиды.

3.298. ☺ В правильную шестиугольную пирамиду вписан шар радиуса 1. Расстояние от центра этого шара до вершины основания пирамиды 7. Найдите: а) длину стороны основания; б) длину бокового ребра; в) длину высоты; г) радиус описанного около пирамиды шара.

3.299. Радиус шара, описанного около правильной треугольной пирамиды, равен 5, а расстояние от его центра до плоскости основания пирамиды 3. Найдите боковое ребро пирамиды (рассмотрите все случаи).

3.300. ♉ В шар радиуса 13 вписана пирамида, основанием которой является прямоугольник со сторонами 10 и 24, а все боковые ребра равны между собой. Найдите площадь ее полной поверхности.

3.301. В треугольной пирамиде длины четырех ребер равны 2, а длины двух ребер равны $2\sqrt{2}$. Найдите радиус описанного около пирамиды шара.

3.302. ♉ Центр шара, вписанного в правильную четырехугольную пирамиду, делит ее высоту в отношении 5 : 3. Найдите величину двугранного угла при боковом ребре ппрамиды.

3.303. Центр шара, описанного около правильной четырехугольной пирамиды, делит ее высоту в отношении 5 : 3, считая от вершины. Найдите величину угла наклона бокового ребра пирамиды к плоскости ее основания.

3.304. Точка пересечения диагоналей основания правильной четырехугольной пирамиды делит отрезок, соединяющий вершину пирамиды с центром описанной около пирамиды сферы, в отношении 5 : 3. Найдите величину угла наклона бокового ребра пирамиды к плоскости ее основания.

3.305. ♉ В четырехугольную пирамиду вписан шар радиуса r. Найдите расстояние от центра шара до каждой из вершин и до каждого из ребер этой пирамиды, если все ребра пирамиды равны.

3.306. ☺ В шар радиуса R вписана правильная треугольная пирамида с плоским углом 90° при вершине. Найдите высоту пирамиды.

3.307. В шар радиуса R вписана правильная треугольная пирамида с двугранным углом 60° при ребре основания. Найдите сторону основания пирамиды.

3.308. Центр шара, описанного около правильной четырехугольной пирамиды, совпадает с центром вписанного в нее шара. Найдите угол наклона бокового ребра пирамиды к плоскости ее основания.

3.309. ♉ Центр описанного около правильной шестиугольной пирамиды шара является серединой отрезка, соединяющего центр вписанного в пирамиду шара с основанием высоты пирамиды. Найдите двугранный угол при ребре основания пирамиды.

3.310. ☺ Центры двух сфер, одна из которых описанна около правильной четырехугольной пирамиды, а другая вписана в нее, симметричны относительно плоскости основания этой пирамиды. Найдите отношение радиуса описанной сферы к радиусу вписанной.

3.311. ♉ Основание $ABCD$ куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ является основанием правильной четырехугольной пирамиды $MABCD$. Сфера проходит через все девять указанных точек. Ребро куба равно a. Какие значения может принимать высота пирамиды?

3.312. ♉ Около правильной четырехугольной пирамиды со стороной основания 4 и высотой 4 описана сфера. Другая сфера проходит через все вершины основания пирамиды и центр описанной сферы. Найдите отношение поверхностей сфер.

3.313. ☺ Радиус описанной около правильной четырехугольной пирамиды сферы в 10 000 раз больше бокового ребра пирамиды. Найдите величину плоского угла при вершине пирамиды.

3.314. Радиус описанной около правильной четырехугольной пирамиды сферы в 10 000 раз больше высоты пирамиды. Найдите величину плоского угла при вершине пирамиды.

3.315. Радиус вписанной в правильную треугольную пирамиду сферы в 10 000 раз меньше высоты пирамиды. Найдите величину плоского угла при вершине пирамиды.

3.316. Сфера касается всех ребер правильной шестиугольной пирамиды с ребром основания a и высотой h. Найдите радиус сферы.

3.317. Центр сферы, вписанной в правильную пирамиду высоты 14, делит эту высоту в отношении 3 : 4. Найдите диаметр этой сферы.

3.318. ♉ Радиус окружности, описанной около основания правильной пирамиды, равен r. Найдите радиус описанной около этой пирамиды сферы, если боковое ребро пирамиды составляет с плоскостью основания угол φ.

3.319. ♉ Радиус окружности, вписанной в основание правильной пирамиды, равен r. Найдите радиус вписанной в эту пирамиду сферы, если величина двугранного угла при ребре основания пирамиды равна φ.

3.320. В сферу радиуса R вписана правильная четырехугольная пирамида, все ребра которой равны между собой. Найдите: а) высоту пирамиды; б) длину ребра пирамиды.

3.321. В правильную пирамиду с высотой h вписана сфера. Найдите радиус этой сферы, если отношение радиуса вписанной в основание пирамиды окружности к анофеме этой пирамиды равно 3 : 7.

3.322. Высота правильной пирамиды равна h, а радиус описанной около ее основания окружности равен r. Найдите радиус описанной около этой пирамиды сферы.

3.323. ♉ Высота правильной пирамиды равна h, а радиус вписанной в ее основание окружности равен r. Найдите радиус вписанной в эту пирамиду сферы.

3.324. Одно из боковых ребер пирамиды равно 8 и удалено от центра описанного около этой пирамиды шара на 3. Найдите радиус этого шара.

3.325. ☺ Около пирамиды описана сфера. Одно из ребер пирамиды, длина которого 12, удалено от центра сферы на 8. Найдите радиус сферы.

3.326. Все боковые ребра треугольной пирамиды $MABC$ составляют с высотой MK углы, равные α; $AB = a$; $BC = 2a$; грань MAC перпендикулярна основанию. Найдите: а) площадь основания; б) высоту пирамиды; в) радиус описанного шара.

3.327. Основанием треугольной пирамиды с равными боковыми ребрами является прямоугольный треугольник с гипотенузой 10. Высота пирамиды равна 12. Найдите радиус описанного шара.

3.328. ♉ Две соседние грани треугольной пирамиды — прямоугольные треугольники с общей гипотенузой c. Найдите радиус описанной около этой пирамиды сферы.

3.329. Найдите радиус сферы, описанной около треугольной пирамиды CAB_1D_1, где C, A, B_1 и D_1 — вершины куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$, длина ребра которого 4.

3.330. В основании пирамиды $MABCD$ лежит прямоугольник $ABCD$ со сторонами $AB = 1$ и $BC = 2$. Высота MD пирамиды равна 2. Найдите радиус описанной около пирамиды сферы.

3.331. ♉ Около пирамиды $MABCD$ описана сфера. Найдите радиус этой сферы, если грань MAB удалена от центра сферы на 12 и $MA = 8$, $MB = 6$, $AB = 10$.

3.332. В основании пирамиды $MABCD$ лежит прямоугольник со сторонами 12 и 14. Высота MA пирамиды равна 12. Найдите радиус описанного около этой пирамиды шара.

3.333. Докажите, что объем пирамиды, описанной около шара, равен одной трети произведения площади полной поверхности пирамиды на радиус этого шара.

Сфера и цилиндр

3.334. ☺ Высота цилиндра равна 5, а радиус его основания равен 3. Поместится ли этот цилиндр в сферу радиуса 4,2?

3.335. ☺ В цилиндр вписана сфера радиуса r. Найдите высоту и радиус основания цилиндра.

3.336. В цилиндр высоты h вписан сфера. Найдите длину линии, общей сферической и цилиндрической поверхностям.

3.337. В цилиндр вписана сфера. Найдите радиус сечения сферы плоскостью, проходящей через две образующие цилиндра, расстояние между которыми равно 8.

3.338. ☺ В цилиндр, полученный вращением прямоугольника площади S вокруг одной из его сторон, вписан шар. Найдите стороны прямоугольника и радиус шара.

3.339. Найдите радиус шара, описанного около цилиндра, радиус основания которого равен 2, а высота равна 3.

3.340. ☺ В цилиндр вписан шар радиуса r. Найдите радиус описанного около этого цилиндра шара.

3.341. В цилиндре проведено сечение, параллельное основанию, так, что в каждый из полученных цилиндров можно вписать по сфере. Найдите радиусы этих сфер, если диагональ осевого сечения цилиндра равна 10.

3.342. Цилиндр получен вращением прямоугольника со сторонами 5 и 6 вокруг одной из его сторон. Найдите радиус описанного около цилиндра шара.

3.343. ☺ Около сферы описан цилиндр, высота которого равна 6. Точки A и B лежат соответственно на окружностях верхнего и нижнего оснований цилиндра, при этом длина AB равна 10. Найдите длину хорды сферы, лежащей на этом отрезке.

3.344. ♉ Плоскость, образующая с осью цилиндра угол в 45°, делит ось в отношении 1 : 3. Найдите радиус окружности, по которой эта плоскость пересекает сферу, вписанную в цилиндр, если высота цилиндра равна h.

3.345. ☺ Сечение, параллельное основанию цилиндра, разбило его на два цилиндра, в один из которых можно вписать сферу радиуса 2, а около другого описать сферу радиуса 2,5. Найдите высоту цилиндра.

3.346. Сечение, проходящее через два параллельных диаметра верхнего и нижнего оснований цилиндра, разбило его на два тела, в каждое из которых вписана сфера радиуса 3. Сферы касаются друг друга в точке, расположенной на оси цилиндра. Кроме того, каждая из сфер касается плоскости сечения, цилиндрической поверхности и плоскостей оснований цилиндра. Найдите радиус основания и высоту цилиндра.

3.347. ☺ Сечение, проходящее через два параллельных диаметра верхнего и нижнего оснований цилиндра, разбило его на два тела, в каждое из которых вписана сфера радиуса 3. Сферы касаются друг друга. Кроме того, каждая из сфер касается плоскости сечения, цилиндрической поверхности и плоскостей оснований цилиндра. Двугранный угол с ребром на оси цилиндра, каждая из граней которого содержит центр одной из сфер, равен 60°. Найдите радиус основания и высоту цилиндра.

3.348. Сечение, параллельное оси цилиндра, разбило его на два тела, в одно из которых вписана сфера. Прямая, соединяющая центр сферы с серединой оси цилиндра, перпендикулярна плоскости сечения. Сфера касается плоскости сечения, цилиндрической поверхности и плоскостей оснований цилиндра. Найдите радиус сферы и высоту цилиндра, если радиус основания цилиндра равен 5, а плоскость сечения пересекает основания цилиндра по хордам длины 6.

3.349. ☺ Плоскость, проходящая через середину оси цилиндра и образующая с этой осью угол в 30°, разбила цилиндр на две фигуры, в каждую из которых вписано по сфере радиуса 1. Каждая из сфер касается плоскости сечения, цилиндрической поверхности и соответствующего основания цилиндра и имеет с цилиндрической поверхностью цилиндра общую окружность. Найдите радиус основания и высоту цилиндра.

3.350. Ровно одна образующая цилиндра является хордой сферы радиуса 10, а другая образующая лежит на диаметре этой сферы. Найдите радиус основания цилиндра, если его высота равна 16, и определите, весь ли цилиндр находится внутри шара.

3.351. ♉ Одна из образующих цилиндра лежит на диаметре шара, а две других являются хордами этого шара. Найдите радиус основания и высоту цилиндра, если расстояние между каждой из пар этих образующих равно 6, а радиус шара 10. Определите, находится ли весь цилиндр внутри шара или нет?

3.352. В шар радиуса 13 вписан цилиндр высоты 4. Второй цилиндр расположен так, что одна из окружностей его оснований лежит на сферической поверхности, а другая — на основании первого цилиндра. Найдите высоту второго цилиндра, если его осевое сечение — квадрат.

3.353. ♉ В шар радиуса 13 вписан цилиндр высоты 4. Второй цилиндр расположен так, что ровно одна из его образующих является хордой шара, а другая лежит на диаметре основания первого цилиндра. Найдите радиус основания второго цилиндра, если его осевое сечение — квадрат.

3.354. ♉ В цилиндр помещены четыре попарно касающиеся друг друга сферы радиуса 1 так, что каждая сфера касается цилиндрической поверхности. Две сферы касаются нижнего, а две другие — верхнего основания цилиндра. Найдите радиус основания и высоту цилиндра.

Сфера и конус

3.355. ☺ Образующая конуса равна 13, а диаметр его основания — 10. Вершина конуса является центром шара, касающегося плоскости основания конуса. Найдите диаметр шара.

3.356. ☺ В конус, радиус основания которого r, а угол наклона образующей к плоскости основания равен α, вписан шар. Найдите радиус этого шара.

3.357. В конус, образующая которого равна диаметру его основания и равна 6, вписана сфера. Найдите радиус сферы и расстояние от ее центра до конической поверхности.

3.358. В конус, угол в осевом сечении которого равен α, вписан шар. Найдите радиус этого шара, если расстояние от его центра до вершины данного конуса равно m.

3.359. Угол в осевом сечении конуса равен α. Найдите радиус вписанного в конус шара, если высота конуса равна h.

3.360. ☺ Угол в осевом сечении конуса равен 120°, а радиус вписанного в конус шара равен 8. Найдите длину линии касания конической и сферической поверхностей.

3.361. Образующая конуса равна 24, а центр описанной около конуса сферы удален от конической поверхности на 5. Найдите радиус сферы.

3.362. Найдите угол наклона образующей конуса к плоскости его основания, если центры сфер, вписанной в этот конус и описанной около него, совпадают.

3.363. ☺ Радиус основания конуса r, а угол при вершине осевого сечения конуса равен α. Найдите радиус описанной около конуса сферы.

3.364. Центр описанного около конуса шара лежит на основании конуса. Найдите радиус шара, если образующая конуса равна 6.

3.365. Пусть высота конуса h, радиус его основания r, а радиус описанного около конуса шара R. Докажите, что $(h - R)^2 + r^2 = R^2$.

3.366. ☺ Пусть высота конуса равна 8, а радиус его основания 4. Найдите радиус описанного около конуса шара.

3.367. Радиус вписанного в конус шара равен 1, а центр шара делит высоту конуса в отношении 13 : 5, считая от вершины конуса. Найдите образующую конуса.

3.368. ♉ В конус помещено 2 шара, один из которых вписан в конус, а второй касается первого шара и конической поверхности, имея с ней общую окружность. Найдите отношение радиусов первой и второй сфер, если образующая конуса в три раза больше радиуса его основания.

3.369. ♉ В конус помещено 2 шара, один из которых вписан в конус, а второй касается первого шара, конической поверхности и плоскости основания конуса. Найдите отношение радиусов первой и второй сфер, если образующая конуса наклонена к плоскости основания под углом $2 \cdot \arcsin \frac{1}{3}$.

3.370. ☺ В шар радиуса 5 вписан конус, радиус основания которого равен 3. Найдите образующую конуса.

3.371. Около конуса, в осевом сечении которого прямоугольный треугольник с гипотенузой c, описана сфера. Найдите радиус сечения этой сферы плоскостью, проходящей через две образующие конуса, угол между которыми $60°$.

3.372. ♉ В сферу радиуса R вписан конус с углом $120°$ при вершине осевого сечения. Найдите радиус сферы, касающейся плоскости основания конуса, данной сферы и не имеющей общих точек с конической поверхностью.

3.373. ☺ В конус с углом φ при вершине осевого сечения и радиусом основания r вписан шар радиуса R. Найдите: а) r, если известны R и φ; б) R, если известны r и φ; в) φ, если $R = 1$, $r = \sqrt{3}$.

3.374. ☺ Конус с углом φ при вершине осевого сечения и радиусом основания r вписан в сферу радиуса R. Найдите: а) r, если известны R и φ; б) R, если известны r и φ; в) φ, если $R = 2r$.

3.375. Через ось конуса, образующая которого наклонена к плоскости основания под углом φ, проведены две взаимно перпендикулярные плоскости. Найдите радиус шара, вписанного в одну из четырех образовавшихся частей, если радиус основания конуса равен R.

Две сферы

3.376. ☺ Сфера радиуса 8 с центром O_1 и сфера радиуса 5 с центром O_2 касаются друг друга. Какие значения может принимать длина отрезка O_1O_2?

3.377. Сфера радиуса 7 с центром O_1 и сфера радиуса 3 с центром O_2 имеют общие точки. Какие значения может принимать длина отрезка O_1O_2?

3.378. ☺ Сфера радиуса 5 с центром O_1 и сфера радиуса 11 с центром O_2 не имеют общих точек. Какие значения может принимать длина отрезка O_1O_2?

3.379. ☺ Две сферы радиуса 1 расположены так, что центр каждой из них лежит на другой. Найдите длину линии пересечения этих сфер.

3.380. Точка A является центром сферы радиуса r и находится на расстоянии 8 от центра O сферы радиуса 3. Определите взаимное расположение сфер в зависимости от числового значения r.

3.381. Точка A является центром сферы радиуса r и находится на расстоянии 3 от центра O сферы радиуса 8. Определите взаимное расположение сфер в зависимости от числового значения r.

3.382. ☺ Расстояние между центрами O_1 и O_2 двух сфер радиусов 2 и 4 равно 10. В каких пределах находится расстояние между произвольной точкой первой сферы и произвольной точкой второй сферы?

3.383. Расстояние между центрами O_1 и O_2 двух сфер радиусов 2 и 4 равно 1. В каких пределах находится расстояние между произвольной точкой первой сферы и произвольной точкой второй сферы?

3.384. Найдите множество точек сферы радиуса 5, удаленных на расстояние 6 от точки A этой сферы.

3.385. Две вершины A и B равностороннего треугольника ABC являются центрами сфер, проходящих через точку C. Найдите отношение радиуса общей окружности этих сфер к стороне треугольника.

3.386. Вершины A и C_1 куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ с ребром 8 см являются центрами двух сфер, радиусы которых равны длине ребра куба. Найдите длину линии пересечения этих сфер.

3.387. ☺ Расстояние между центрами двух сфер радиусов a и b равно c, причем $|a - b| < c < a + b$. Докажите, что линией пересечения этих сфер является окружность радиуса $\frac{2 \cdot \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}{c}$, где $p = \frac{a+b+c}{2}$.

3.388. Докажите, что множество точек пространства, удаленных от одного из концов отрезка $AB = 15$ на 13, а от другого — на 14, есть окружность с центром на прямой AB. Найдите: а) радиус этой окружности; б) отношение, в котором центр O этой окружности делит отрезок AB (найдите отношение меньшего отрезка к большему).

3.389. В куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$ помещены две равные касающиеся друг друга сферы. Первая сфера касается всех граней куба, содержащих вершину A, вторая — вершину A_1. Найдите ребро куба, если радиусы сфер равны 4.

3.390. В куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$ помещены две касающиеся друг друга внешним образом сферы, радиусы которых относятся как 2 : 3. Первая сфера касается всех граней куба, содержащих вершину A, вторая — всех граней куба, содержащих вершину B. Найдите их радиусы, если ребро куба равно a.

3.391. ☺ В куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$ помещены две равные касающиеся друг друга сферы. Первая сфера касается всех граней куба, содержащих вершину A, вторая — всех граней куба, содержащих вершину C. Найдите отношение длины ребра куба к радиусу сферы.

3.392. В куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$ помещены две касающиеся друг друга внешним образом сферы, радиусы которых относятся как 3 : 4. Первая сфера касается всех граней куба, содержащих вершину A, вторая — всех граней куба, содержащих вершину B_1. Найдите их радиусы, если ребро куба равно 7.

3.393. ☺ В куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$ помещены две равные касающиеся друг друга сферы. Первая сфера касается всех граней куба, содержащих вершину A, вторая — всех граней куба, содержащих вершину C_1. Найдите отношение длины диагонали куба к радиусу сферы.

3.394. ♉ В куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$ помещены две касающиеся друг друга внешним образом сферы, радиусы которых относятся как 3 : 5. Первая сфера касается всех граней куба, содержащих вершину A, вторая — всех граней куба, содержащих вершину C_1. Найдите их радиусы, если ребро куба равно 16.

3.395. ♉ В куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$ помещены две равные, касающиеся друг друга внешним образом сферы. Первая сфера касается всех граней куба, содержащих вершину A, вторая касается всех ребер куба, содержащих вершину C_1. Найдите радиусы этих сфер, если диагональ куба равна d.

3.396. Найдите отношение площадей поверхностей двух шаров, один из которых вписан, а другой описан для: а) куба; б) равностороннего цилиндра; в) равностороннего конуса.

Три сферы и более

3.397. ☺ Три равные сферы радиуса 6 касаются друг друга. Найдите расстояние от центра одной из них до прямой центров двух других.

3.398. ♉ Три равные сферы радиуса 6 касаются друг друга. Найдите радиус сферы, касающейся всех трех этих сфер, если ее центр лежит в плоскости центров трех данных сфер.

3.399. ♉ На окружности радиуса r расположены центры четырех равных сфер, любая из которых касается двух других. Найдите радиусы этих сфер.

3.400. ♉ В вершинах правильного тетраэдра с ребром 6 расположены центры четырех равных сфер, попарно касающихся друг друга. Найдите: а) радиусы этих сфер; б) расстояние от центра одной из них до плоскости центров трех других.

3.401. ♉ В вершинах правильного тетраэдра с ребром 18 расположены центры четырех равных сфер, попарно касающихся друг друга. Найдите радиус сферы, касающейся всех этих сфер.

3.402. ♉ В основании тетраэдра $ABCD$ лежит треугольник ABC со сторонами $AB = 9$, $AC = 7$ и $BC = 8$. Вершины тетраэдра являются центрами сфер, каждая из которых касается трех других внешним образом. Радиус сферы с центром в точке D равен 10. Найдите: а) радиусы остальных сфер; б) длины боковых ребер тетраэдра.

3.403. ♉ В основании тетраэдра $ABCD$ лежит треугольник ABC со сторонами $AB = 9$, $AC = 7$ и $BC = 8$. Вершины тетраэдра являются центрами сфер. Сферы с центрами в вершинах основания тетраэдра касаются друг друга внешним образом, а сфера с центром в точке D касается всех остальных сфер внутренним образом, и ее радиус равен 20. Найдите длины боковых ребер тетраэдра.

Задачи к 19.7, 19.8. Площади поверхностей шара и его частей. Объем шара и его частей

3.404. ☺ (*Устно.*) Что больше: площадь поверхности куба с ребром 2 или площадь поверхности шара с радиусом 2?

3.405. ☺ (*Устно.*) На покраску тела, представляющего собой полушар, ушло 3 л краски. Сколько краски уйдет на покраску целого шара того же радиуса (расход краски на единицу площади постоянный)?

3.406. ☺ (*Устно.*) Два шара имеют общий центр и расположены так, что диаметр большего, пересекаясь со сферой меньшего, делится на отрезки, равные соответственно 1 см; 2 см; 1 см. Найдите отношение объемов этих шаров (меньшего к большему).

3.407. ☺ (*Устно.*) Найдите отношение площади поверхности шара к площади боковой поверхности равностороннего цилиндра, радиус основания которого равен радиусу шара.

3.408. ☺ (*Устно.*) Площадь полной поверхности равностороннего цилиндра больше площади поверхности шара, радиус которого равен радиусу основания цилиндра, на 200π см^2. Найдите радиус шара.

3.409. ☺ (*Устно.*) В цилиндр вписан шар. Какой процент объема цилиндра составляет объем этого шара?

3.410. ☺ (*Устно.*) Найдите площадь поверхности сферы, описанной около куба с ребром a.

3.411. Расстояние между центрами двух внешне касающихся шаров равно 24 см, а разность площадей их поверхностей равна 192π см^2. Найдите радиусы шаров.

3.412. В шар радиуса R вписан куб, и на его гранях построены правильные пирамиды с вершинами на поверхности шара. Найдите объем образовавшегося многогранника и укажите его отношение к объему шара.

3.413. Сфера делит каждое ребро куба на три равные части. Найдите площадь поверхности этой сферы, если ребро куба a.

3.414. ☺ В шар вписан прямоугольный параллелепипед. Диагонали двух боковых граней параллелепипеда, выходящие из одной вершины, равны 16 см и 21 см, а угол между ними равен 60°. Найдите площадь поверхности шара.

3.415. ☺ Прямая треугольная призма, стороны основания которой равны 29 см, 35 см и 48 см, описана около шара. Найдите объемы шара и призмы.

3.416. Основанием прямой призмы, вписанной в шар, является треугольник, две стороны которого равны 4 см и 14 см, а угол между ними равен 60°. Объем призмы равен 168 см^3. Найдите площадь поверхности шара.

3.417. ♉ В правильную четырехугольную пирамиду вписан шар. Найдите площадь поверхности шара, если сторона основания равна a и угол при вершине пирамиды α.

3.418. Основанием треугольной пирамиды $SABC$ является равносторонний треугольник ABC, сторона которого равна 4. Известно также, что $AS = BS = \sqrt{19}$, а $CS = 3$. Найдите площадь сферы, описанной около этой пирамиды.

Решение. Решим эту задачу двумя методами.

Первый метод (геометрический). Пусть O — центр сферы, описанной около данной пирамиды; D — точка пересечения медиан правильного $\triangle ABC$; E — середина отрезка AB (рис. 27).

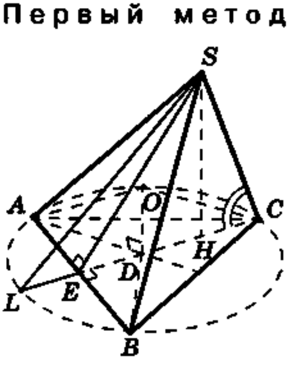


Рис. 27

Центр O сферы равноудален от всех вершин $\triangle ABC$, поэтому принадлежит прямой, проходящей через точку D перпендикулярно плоскости ABC.

Так как точка E — середина отрезка AB, то $SE \perp AB$ ($AS = BS$) и $CE \perp AB$ ($\triangle ABC$ — правильный). Значит, по признаку перпендикулярности прямой и плоскости $AB \perp (CSE)$, поэтому $(CSE) \perp (ABC)$ (по признаку перпендикулярности двух плоскостей). Это означает, что прямая OD, а следовательно, и точка O — центр сферы — лежат в плоскости CSE.

Точка D является центром окружности, описанной около $\triangle ABC$. (По этой окружности плоскость ABC пересекает сферу, описанную около данной пирамиды.) Если L — точка пересечения прямой CE и упомянутой окружности, то CL — ее диаметр. Найдем CL.

В правильном $\triangle ABC$ имеем: $CE = \frac{AB\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3}$; $CD = \frac{2}{3}CE = = \frac{4}{\sqrt{3}}$.

Тогда $CL = 2CD = \frac{8}{\sqrt{3}}$.

Далее:

$\triangle BSE(\angle BES = 90°)$: $SE^2 = SB^2 - BE^2 = 19 - 4 = 15$ (по теореме Пифагора);

$\triangle SEC$ (по теореме косинусов):

$$\cos C = \frac{SC^2 + EC^2 - SE^2}{2SC \cdot EC} = \frac{9 + 12 - 15}{2 \cdot 3 \cdot 2\sqrt{3}} = \frac{1}{2\sqrt{3}};$$

$\triangle SLC$ (по теореме косинусов):

$$SL^2 = SC^2 + CL^2 - 2SC \cdot CL \cdot \cos C = \frac{67}{3} \Rightarrow SL = \sqrt{\frac{67}{3}}.$$

Плоскость CSL проходит через центр O сферы, следовательно, пересекает сферу по большой окружности, которая описана около $\triangle CSL$. Значит, радиус R этой окружности равен радиусу сферы, описанной около данной пирамиды. Найдем R.

В треугольнике CSL имеем $\frac{SL}{\sin C} = 2R$. Так как в этом треугольнике $\cos C = \frac{1}{2\sqrt{3}}$, то $\sin C = \sqrt{1 - \cos^2 C} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{11}{3}}$. Тогда $R = \frac{SL}{2\sin C} = \sqrt{\frac{67}{3}} : \sqrt{\frac{11}{3}} = \sqrt{\frac{67}{11}}$.

Находим площадь Q сферы:

$$Q = 4\pi R^2 = 4\pi \cdot \frac{67}{11} = \frac{268}{11}\pi \text{ (кв. ед.)}.$$

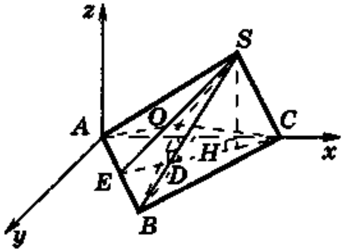


Рис. 28

Второй метод (координатный). Введем в пространстве декартову прямоугольную систему координат так, чтобы ее начало совпадало с вершиной A данной пирамиды, направление оси абсцисс — с направлением луча AC, ось аппликат была перпендикулярна плоскости основания ABC пирамиды (рис. 28).

В этой системе координат вершины основания пирамиды имеют координаты: $A(0;\ 0;\ 0)$, $B(2;\ 2\sqrt{3};\ 0)$, $C(4;\ 0;\ 0)$.

Обозначив через x, y, z координаты вершины S пирамиды, найдем их из условий $AS = BS = \sqrt{19}$, $CS = 3$.

Имеем: $AS^2 = x^2 + y^2 + z^2 = 19$; $BS^2 = (x-2)^2 + (y-2\sqrt{3})^2 + z^2 = 19$; $CS^2 = (x-4)^2 + y^2 + z^2 = 9$.

Решая систему уравнений

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 19, \\ (x-2)^2 + (y-2\sqrt{3})^2 + z^2 = 19, \\ (x-4)^2 + y^2 + z^2 = 9, \end{cases}$$

находим: $x = \frac{13}{4}$, $y = \frac{\sqrt{3}}{4}$, $z = \frac{\sqrt{33}}{2}$.

Таким образом, вершина S имеет координаты:

$$S\left(\frac{13}{4};\ \frac{\sqrt{3}}{4};\ \frac{\sqrt{33}}{2}\right).$$

Пусть центр O сферы имеет координаты a, b, c, а ее радиус равен R. Так как сфера описана около пирамиды $SABC$, то $OA^2 = OB^2 = OC^2 = OS^2 = R^2$. Это соотношение в координатном виде равносильно системе уравнений

$$\begin{cases} a^2 + b^2 + c^2 = R^2, \\ (a-2)^2 + (b-2\sqrt{3})^2 + c^2 = R^2, \\ \left(a - \frac{13}{4}\right)^2 + \left(b - \frac{\sqrt{3}}{4}\right)^2 + \left(c - \frac{\sqrt{33}}{2}\right)^2 = R^2, \\ (a-4)^2 + b^2 + c^2 = R^2. \end{cases}$$

Вычитая из первого уравнения четвертое, получаем $a = 2$, после чего, вычитая из первого уравнения второе, получаем $b = \frac{2}{\sqrt{3}}$.

После вычитания третьего уравнения системы из первого ее уравнения получаем:

$\frac{13}{4}\left(2a - \frac{13}{4}\right) + \frac{\sqrt{3}}{4}\left(2b - \frac{\sqrt{3}}{4}\right) + \frac{\sqrt{33}}{2}\left(2c - \frac{\sqrt{33}}{2}\right) = 0$. Подставив в это уравнение вместо a и b найденные их значения, получаем $c = \frac{5}{\sqrt{33}}$. Отсюда $R^2 = a^2 + b^2 + c^2 = 4 + \frac{4}{3} + \frac{25}{33} = \frac{67}{11}$. Тогда искомая площадь Q сферы равна $Q = 4\pi R^2 = \frac{268}{11}\pi$.

Ответ: $\frac{268}{11}\pi$.

3.419. ☺ В шар вписана пирамида, основанием которой является прямоугольный треугольник с гипотенузой, равной 2 см. Найдите объем шара, если каждое боковое ребро пирамиды составляет с основанием угол α.

3.420. Высота правильного тетраэдра равна 9 см. Найдите объем вписанного в него шара.

3.421. Пирамида, основанием которой служит правильный треугольник со стороной a, вписана в шар. Две боковые грани пирамиды перпендикулярны плоскости основания, третья грань образует с ним двугранный угол φ. Найдите объем шара.

3.422. Найдите площадь поверхности шара, описанного около правильной треугольной пирамиды, сторона основания которой 12 см, а боковое ребро 8 см.

3.423. ♉ В шар вписана правильная четырехугольная пирамида. Расстояние от центра шара до стороны основания пирамиды равно $\sqrt{5}$ дм, а до бокового ребра — $\sqrt{3}$ дм. Найдите объем и площадь поверхности шара.

3.424. Основанием пирамиды служит треугольник со сторонами 22 см, 26 см и 40 см. Высота пирамиды проходит через центр вписанной в ее основание окружности и равна 8 см. Найдите объем и площадь поверхности вписанного в пирамиду шара.

3.425. В шар вписан прямоугольный параллелепипед. Диагонали двух боковых граней параллелепипеда, выходящие из одной вершины, равны 16 см и 21 см, а угол между ними 60°. Найдите площадь поверхности шара.

3.426. ☺ Около правильной треугольной пирамиды описан шар радиуса R, центр которого совпадает с центром шара, вписанного в эту же пирамиду. Найдите объем и площадь поверхности вписанного шара.

3.427. ♉ Основанием пирамиды служит равнобедренный треугольник с углом φ при вершине, все боковые грани пирамиды наклонены к основанию под углом α. Объем шара, вписанного в пирамиду, равен V. Найдите объем пирамиды.

3.428. ♉ Основание пирамиды — ромб со стороной a и острым углом α; каждый из двугранных углов при основании равен β. Найдите объем шара, вписанного в пирамиду.

3.429. ☺ Радиус основания равностороннего цилиндра равен 12 см; точка пересечения диагоналей его осевого сечения является центром сферы радиуса 15 см. Найдите площадь части сферической поверхности, находящейся вне цилиндра.

3.430. Найдите отношение объемов шара радиуса R и равностороннего цилиндра, радиус основания которого равен радиусу шара.

3.431. ☺ Около шара описаны равносторонний цилиндр и равносторонний конус. Докажите, что объем цилиндра есть средняя пропорциональная величина между объемами шара и конуса.

3.432. ☺ Диаметр шара является осью цилиндра. Найдите объем части шара, лежащей вне цилиндра, если радиусы шара и основания цилиндра равны соответственно 15 см и 12 см.

3.433. В шар вписан цилиндр, в котором угол между диагоналями осевого сечения равен α. Образующая цилиндра равна l. Найдите объем шара.

3.434. Диаметр шара, равный 30 м, является осью цилиндра, у которого радиус основания равен 12 см. Найдите объем части шара, заключенной внутри цилиндра.

3.435. Треугольник, стороны которого равны 7 см, 8 см и 9 см, вращается вокруг средней по величине стороны. Найдите площадь поверхности сферы, вписанной в образовавшуюся фигуру вращения (*биконус*).

3.436. ♉ Конус, радиус основания которого равен 15 дм, а высота 20 дм, имеет общее основание с полушаром. Найдите площадь поверхности полушара, находящейся: а) внутри конуса; б) вне конуса.

3.437. В шар вписан конус, радиус основания которого r, а высота H. Найдите площадь поверхности и объем шара.

3.438. В равносторонний конус вписан шар, а в шар — равносторонний цилиндр. Найдите отношение площадей поверхностей шара и цилиндра.

3.439. Центр одного из двух равных шаров радиуса R расположен на поверхности другого. Найдите объем общей части шаров.

3.440. ☺ В усеченный конус, радиусы оснований которого равны R и r, вписан шар. Найдите отношение объемов усеченного конуса и шара.

3.441. ♉ В правильной призме $ABCDA_1B_1C_1D_1$ ребро AB равно a, угол между AB_1 и DB равен α. Найдите площадь поверхности шара, проходящего через точки B, B_1, C_1 и A_1.

3.442. ☺ Светящаяся точка находится вне шара радиуса r на расстоянии a от него. Найдите площадь освещенной поверхности шара.

3.443. Круговой сектор, радиус которого равен 25 см, а хорда, стягивающая его дугу, равна 30 см, вращается вокруг диаметра, перпендикулярного одному из граничных радиусов. Найдите объем тела вращения.

3.444. ♉ В усеченный конус, радиусы оснований которого равны R и r, вписан шар. Найдите отношение объемов усеченного конуса и шара.

Задачи после главы 3 «Фигуры вращения»

3.445. Найдите площадь поверхности шара, вписанного: а) в куб, площадь полной поверхности которого равна Q; б) в равносторонний цилиндр, диагональ осевого сечения которого равна a; в) в равносторонний конус, площадь полной поверхности которого равна Q.

3.446. Докажите, что площадь поверхности равностороннего цилиндра, вписанного в шар, есть средняя пропорциональная между площадью поверхности шара и площадью поверхности равностороннего конуса, вписанного в этот шар.

3.447. Найдите объем шара, описанного около пирамиды, основанием которой служит прямоугольник с диагональю 10 см, а каждое боковое ребро пирамиды составляет с ее основанием угол β.

3.448. Высота конуса, радиус основания которого равен 15 см, а образующая — 25 см, является диаметром шара. Найдите площадь поверхности этого шара, лежащей внутри конуса.

3.449. Четыре равных шара радиуса R расположены так, что каждый касается трех других. Найдите расстояние от центра одного из шаров до плоскости, касательной к трем другим.

3.450. Шар вписан в прямую призму, основанием которой служит прямоугольный треугольник. В этом прямоугольном треугольнике перпендикуляр, опущенный из вершины прямого угла на гипотенузу, равен h и составляет с одним из катетов угол α. Найдите площадь поверхности шара.

3.451. ♉ Внутри конуса расположены четыре равных шара радиуса R так, что каждый из них касается двух других шаров, основания конуса и его боковой поверхности. Найдите высоту конуса, если его образующие наклонены к плоскости основания под углом φ.

3.452. В сферу вписана правильная четырехугольная пирамида, у которой двугранный угол при основании равен φ. Найдите площадь основания пирамиды, если площадь сферы равна Q.

3.453. ♉ В усеченный конус, вписанный в сферу, вписана сфера. Найдите угол наклона образующих конуса к плоскости основания, если отношение радиусов данных сфер равно $2\sqrt{5}$.

3.454. ♉ В куб, ребро которого равно a, вписываются цилиндры так, что их оси совпадают с диагональю куба, а окружность каждого из оснований касается трех граней куба. Найдите объем того из вписанных цилиндров, который имеет наибольшую площадь боковой поверхности.

3.455. В усеченный конус вписан шар радиуса r. Образующая конуса наклонена к плоскости основания под углом α. Найдите объем усеченного конуса.

3.456. Найдите радиус шара, объем которого численно равен площади его поверхности.

3.457. Четыре шара радиуса R и четыре шара радиуса r расположены так, что каждый касается трех шаров одного радиуса и трех шаров другого радиуса. Найдите отношение объема шара радиуса R к объему шара радиуса r ($R > r$).

Решение. Обозначим V_1, V_2 — объемы шаров с радиусами соответственно R и r. Тогда $V_1 = \frac{4}{3}\pi R^3$, $V_2 = \frac{4}{3}\pi r^3$, значит, $\frac{V_1}{V_2} = \left(\frac{R}{r}\right)^3$.

Пусть A, B, C, P — центры шаров радиуса R; A_1 B_1, C_1, P_1 — центры шаров радиусом r. Тогда:

1) $AB = BC = CA = AP = BP = CP = 2R \Rightarrow PABC$ — правильный тетраэдр с ребром $2R$;

2) $A_1B_1 = B_1C_1 = C_1A_1 = A_1P_1 = B_1P_1 = C_1P_1 = 2r \Rightarrow P_1A_1B_1C_1$ — правильный тетраэдр с ребром $2r$.

Обозначим A_2, B_2, C_2, P_2 — центры граней тетраэдра $PABC$ (рис. 29) и докажем, что все четыре высоты AA_2, BB_2, CC_2 и PP_2 пересекаются в одной точке и делятся этой точкой в отношении $3 : 1$, считая от вершины.

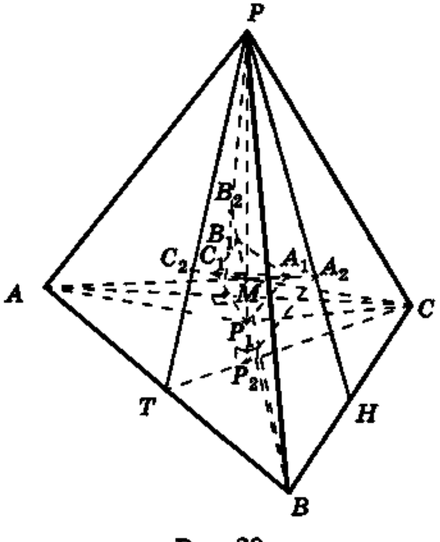


Рис. 29

В самом деле, если $M = AA_2 \cap PP_2$, то из подобия треугольников HAP и HP_2A_2 следует $HP : HA_2 = AP : A_2P_2 = 3 : 1$, тогда из подобия треугольников APM и A_2P_2M получаем $AP : A_2P_2 = PM : MP_2 = AM : MA_2 = 3 : 1$, т. е. $PM = \frac{3}{4}PP_2$.

Аналогично доказывается, что высоты BB_2 и CC_2 делятся точкой M в отношении $BM : MB_2 = CM : MC_2 = 3 : 1$ и, таким образом, точки A_2, B_2, C_2, P_2 равноудалены от точки M.

Далее, так как шар с центром P_1 и радиусом r касается шаров с центрами A, B, C и радиусами R, то $P_1A = P_1B = P_1C = R + r$, т. е. точка P_1 равноудалена от вершин A, B и C правильного тетраэдра $PABC$. Так как $(R + r) < 2R$, то P_1 принадлежит высоте PP_2 этого тетраэдра: $P_1 \in PP_2$. Аналогично доказывается, что $A_1 \in AA_2$, $B_1 \in BB_2$, $C_1 \in CC_2$.

Найдем дважды длину высоты PP_2 тетраэдра $PABC$: с одной стороны, как длину катета прямоугольного треугольника APP_2, с другой стороны, как сумму длин отрезков PM, MP_1 и P_1P_2.

В правильном $\triangle ABC$ со стороной $2R$ имеем: $AP_2 = \frac{2}{3}AH = \frac{2}{3} \cdot \frac{2R\sqrt{3}}{2} = \frac{2R\sqrt{3}}{3}$. Тогда в прямоугольном $\triangle APP_2$: $PP_2 = \sqrt{AP^2 - AP_2^2} = \sqrt{4R^2 - \frac{4}{3}R^2} = \frac{2R\sqrt{6}}{3}$.

Найдем длину отрезка PP_2 иначе. В прямоугольном $\triangle AP_1P_2$ имеем: $P_1P_2 = \sqrt{AP_1^2 - AP_2^2} = \sqrt{(R + r)^2 - \left(\frac{2R\sqrt{3}}{3}\right)^2} = \sqrt{(R + r)^2 - \frac{4}{3}R^2}$. Аналогично можно убедиться, что $A_1A_2 = B_1B_2 = C_1C_2 = P_1P_2 = \sqrt{(R + r)^2 - \frac{4}{3}R^2}$. Тогда, учитывая, что $MA_2 = MB_2 = MC_2 = MP_2$, приходим к выводу: $MA_1 = MB_1 = MC_1 = MP_1$. Это означает, что точка M — общий центр правильных тетраэдров $PABC$ и $P_1A_1B_1C_1$ и $PP_2 = PM + MP_1 + P_1P_2$.

Так как в правильном тетраэдре $PABC$ с ребром $2R$ для расстояния PM от вершины P до центра M этого тетраэдра выполняется $PM = \frac{3}{4}PP_2 = \frac{3}{4} \cdot \frac{2R\sqrt{6}}{3} = \frac{R\sqrt{6}}{2}$, то в правильном тетраэдре $P_1A_1B_1C_1$ с ребром $2r$ для расстояния P_1M от вершины P_1 до его центра M выполняется $P_1M = \frac{r\sqrt{6}}{2}$.

Подставляя в равенство $PP_2 = PM + MP_1 + P_1P_2$ найденные значения длин отрезков PP_2, PM, MP_1 и P_1P_2, получаем:

$$\frac{2R\sqrt{6}}{3} = \frac{R\sqrt{6}}{2} + \frac{r\sqrt{6}}{2} + \sqrt{(R + r)^2 - \frac{4}{3}R^2}$$

или после элементарных преобразований:

$$R^2 - 6Rr + r^2 = 0.$$

Разделив это уравнение на r^2 и введя новую переменную $t = \frac{R}{r}$, получаем уравнение $t^2 - 6t + 1 = 0$, корнями которого являются $t_1 = 3 - 2\sqrt{2}$, $t_2 = 3 + 2\sqrt{2}$. Так как $t_1 < 0$, то условию задачи удовлетворяет лишь значение $t_2 = 3 + 2\sqrt{2}$. Это означает, что $\frac{R}{r} = 3 + 2\sqrt{2}$. Тогда $\frac{V_1}{V_2} = \left(\frac{R}{r}\right)^3 = (3 + 2\sqrt{2})^3$.

Ответ: $(3 + 2\sqrt{2})^3$.

3.458. В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ с ребром a точка K — середина ребра AB, точка E — середина ребра DD_1. В каком отношении делит объем куба плоскость, проходящая через точки A_1, K и E?

3.459. Из множества прямоугольных параллелепипедов, стороны оснований которых относятся как $3:5$, а периметр наименьшей грани равен 36 см, найдите площадь боковой поверхности параллелепипеда, имеющего наибольший объем.

3.460. Основанием призмы $ABCDA_1B_1C_1D_1$ является ромб $ABCD$ с острым углом A, равным α, и стороной a. Вершина A_1 удалена на расстояние a от точек A, B и D. Найдите объем призмы.

3.461. Полная поверхность конуса Q, а угол при вершине осевого сечения α. Найдите радиус шара, равновеликого данному конусу.

3.462. ♉ В конус, образующая которого наклонена к плоскости основания под углом φ и площадь основания равна Q, вписан шар. Найдите объем конуса, отсекаемого от данного плоскостью круга, по окружности которого поверхность шара касается боковой поверхности конуса.

3.463. Докажите, что отношение объемов шара и описанного около него усеченного конуса равно отношению площадей их поверхностей.

3.464. ♉ В сферу радиуса 2 вписан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Найдите ребро такого куба, одна грань которого находится на грани $A_1B_1C_1D_1$ куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$, а вершины его противоположной грани лежат на поверхности сферы.

3.465. ♉ Найдите радиус сферы, проходящей через вершины A, B и C куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ с ребром a, если центр сферы лежит на сфере, вписанной в данный куб.

3.466. ♉ Найдите радиус сферы, проходящей через вершины A, B и C куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ с ребром a, если центр этой сферы лежит на сфере, описанной около данного куба.

3.467. Сфера с центром в вершине данного конуса касается плоскости его основания. Найдите длину линии пересечения конической и сферической поверхностей, если высота конуса равна h, а радиус его основания r.

3.468. Высота конуса является диаметром шара радиуса 2. Найдите длину линии пересечения конической и сферической поверхностей, если образующая конуса равна 5.

3.469. Тело состоит из двух конусов с образующими, равными 3 и 4. Конусы имеют общее основание, а их вершины расположены по разные стороны этого основания на расстоянии 5 друг от друга. Найдите радиус основания конусов и радиус сферы, описанной около данного тела.

3.470. В сферу радиуса R вписан конус с углом 120° при вершине осевого сечения. Найдите радиус сферы, касающейся плоскости основания конуса и данной сферы, но не имеющей общих точек с конической поверхностью.

3.471. ♉ В конус высоты 8 и радиуса основания 6 помещено три равные сферы, каждая из которых касается плоскости основания, двух других сфер и имеет по одной общей точке с конической поверхностью. Найдите радиусы этих сфер.

3.472. ♉ В шар радиуса 13 вписан цилиндр высоты 4. Второй цилиндр расположен так, что одна из окружностей его оснований лежит на сферической поверхности, а другая на основании первого цилиндра. Найдите высоту второго цилиндра, если его осевое сечение — квадрат.

3.473. В шар радиуса 13 вписан цилиндр высоты 4. Второй цилиндр расположен так, что ровно одна из его образующих является хордой шара, а другая лежит на диаметре основания первого цилиндра. Найдите радиус основания второго цилиндра, если его осевое сечение — квадрат.

3.474. ♉ В цилиндр помещены четыре попарно касающиеся друг друга сферы радиуса 1 так, что каждая сфера касается цилиндрической поверхности. Две сферы касаются нижнего, а две верхнего основания цилиндра. Найдите радиус основания и высоту цилиндра.

3.475. ♉ Основание пирамиды — ромб с углом $60°$ и стороной 6. Вершина пирамиды проектируется в точку пересечения диагоналей основания. Высота пирамиды равна 9. Сфера проходит через четыре вершины пирамиды. Найдите расстояние от пятой вершины пирамиды до сферы (рассмотрите все случаи).

3.476. ♉ В треугольную пирамиду, все ребра которой равны 2 см, помещены четыре равных шара, каждый из которых касается трех остальных и вписан в один из трехгранных углов пирамиды. Найдите радиус этих шаров.

3.477. ♉ Радиус шара, вписанного в усеченный конус, равен R, а радиус шара, описанного около этого усеченного конуса, равен $R\sqrt{30}$. Найдите угол между образующей усеченного конуса и его основанием.

3.478. Плоскость, перпендикулярная диаметру шара, делит его на части 6 см и 12 см. Найдите объемы частей шара.

3.479. Правильный тетраэдр помещен в цилиндр. Найдите отношение высоты цилиндра к диаметру его основания, если: а) три вершины тетраэдра лежат на окружности нижнего основания цилиндра, а четвертая вершина совпадает с центром верхнего основания; б) скрещивающиеся ребра тетраэдра являются диаметрами верхнего и нижнего оснований цилиндра. Можно ли в каждый из этих тетраэдров вписать куб?

Задания для склеивания многогранников

Нарисуйте развертку многогранника, свойства которого указаны в условии задачи, и склейте из нее этот многогранник. Многогранником является...

3.480. Треугольная пирамида, центр описанного около которой шара лежит на ее ребре.

3.481. Треугольная призма, центр описанного около которой шара лежит на ее грани.

3.482. Треугольная пирамида, радиус описанного около которой шара не менее чем в 10 раз больше, чем длина большего ребра пирамиды.

3.483. Треугольная пирамида, в основании которой лежит правильный треугольник, а центр вписанного в нее шара делит высоту в отношении 5 : 1, считая от вершины.

3.484. Четырехугольная пирамида, около которой нельзя описать шар, но в которую вписать шар можно.

3.485. Неправильная четырехугольная призма, для которой существуют вписанная в нее и описанная около нее сферы.

ОТВЕТЫ И УКАЗАНИЯ К ЗАДАЧАМ

Глава 1. Преобразования пространства

1.001. г) Треугольник или четырехугольник; д) квадрат, или параллелограмм, или шестиугольник с попарно параллельными противоположными сторонами; е) параллелограмм или шестиугольник с попарно параллельными сторонами. **1.002.** а) Плоскость не пересекает, по крайней мере, одно боковое ребро параллелепипеда; б) плоскость пересекает все боковые ребра. **1.003.** Нет. **1.004.** Да. **1.006.** Существуют. **1.008.** Верно. **1.009.** Да. **1.010.** Нет. **1.013.** Может. **1.015.** а) $K(-3;\ -1;\ -2)$; б) $P(-9;\ -3;\ -6)$. **1.016.** $(2{,}5;\ 3;\ 2)$. **1.017.** а) $(5;\ 6;\ 8)$; б) $(-7;\ -2;\ 4)$. **1.018.** а) Да; б) является, если l перпендикулярна α. **1.019.** Ровно одну — да, ровно две — нет. **1.020.** Да. **1.021.** Да. **1.022.** Может, если эти сферы равны. **1.023.** Да. **1.024.** 1. Да. 2. Могут. **1.025.** Может иметь и неподвижные плоскости, и неподвижные прямые. *Указание. Рассмотрите, например; центральную симметрию.* **1.026.** Да. **1.027.** Да. *Указание. Найдите образ двух любых диаметров шара при данном движении.* **1.028.** Нет. **1.029.** На $\vec{k}$ или $-\vec{k}$. **1.030.** $\vec{j}$ или $-\vec{j}$. **1.032.** а). Один; б), г) бесконечно много; в) один, если прямые пересекаются; бесконечно много, если прямые параллельны; нет центра симметрии, если прямые скрещиваются. **1.033.** а), г) Да. **1.034.** *Указание. Вершины оснований тетраэдров расположите в вершинах правильного шестиугольника.* **1.037.** $(-1; 0; 1)$. **1.038.** *Указание. Рассмотрите симметрию относительно точки их пересечения.* **1.040.** Одноименную фигуру. **1.041.** Нет. **1.042.** *Указание. Отображение является движением, если эти кубы равны; в таком случае правильный тетраэдр отображается на равный ему правильный тетраэдр.* **1.044.** $2x + 3y - z + 5 = 0$. **1.045.** $\begin{cases} x = -3 - 2t, \\ y = -5 + 3t,\ t \in R. \\ z = -t, \end{cases}$ **1.049.** г) Плоскость треугольника и каждая из плоскостей, проходящих через его медиану перпендикулярно плоскости, в которой он лежит. **1.052.** Две. **1.055.** а) Три; б) три; в) одна или ни одной. **1.056.** Имеет. **1.058.** а) Две или три. **1.059.** Да. **1.062.** а) Параллелен плоскости; б) перпендикулярен плоскости. **1.063.** а) Да; б) да; в) нет. **1.064.** $(2; 1; 0)$, $(6; 1; 0)$, $(6; 5; 0)$, $(2; 5; 0)$, $(2; 1; \pm4)$, $(6; 1; \pm4)$, $(6; 5; \pm4)$, $(2; 5; \pm4)$. **1.065.** а) Да; б) да. **1.066.** *Указание. Постройте точку, симметричную одной из данных точек относительно плоскости* α. **1.068.** Окружность, расположенная в плоскости, перпендикулярной прямой p; центр окружности — на прямой p, а ее радиус равен b. **1.069.** а) $(-2; 3; -4)$; б) $(3; 2; -4)$; в) $(2; -3; 4)$; г) $(-2; -3; 4)$. **1.071.** $2x -$

$-8y-4z+27=0$. **1.072.** $F\left(1\frac{6}{7};\ 2\frac{5}{7};\ 1\frac{5}{7}\right)$. **1.073.** $\begin{cases} x=3-2t, \\ y=5+3t,\ t\in R. \\ z=t, \end{cases}$

1.074. $2x-3y-z-5=0$. **1.076.** Параллелограмм, равный данному. **1.077.** Да. **1.078.** Параллельным одной из диагоналей куба. **1.079.** b. *Указание. Рассмотрите параллельный перенос на вектор* $\overrightarrow{BC}$. **1.080.** Нет. **1.083.** 7. **1.085.** (4; 6; 4). **1.087.** *Указание. Рассмотрите перенос на вектор* $\overrightarrow{OO_1}$. **1.089.** 24 кв. ед. **1.093.** а) Три; б) пять. **1.097.** Да. **1.103.** Да. **1.109.** а) $a \| a'$; б) $a'=a$; в) $a' \| a$. **1.111.** Да. **1.114.** а) *Указание. Рассмотрите случаи, когда отрезки лежат на параллельных, пересекающихся или скрещивающихся прямых.* **1.115.** *Указание. Рассмотрите повороты, оси которых перпендикулярны плоскости* α. **1.116.** *Указание. Рассмотрите повороты, оси которых лежат в плоскости серединных перпендикуляров отрезка с концами в центрах данных шаров.* **1.118.** Центральная симметрия относительно середины отрезка AB; параллельный перенос на вектор AB; поворот на угол 180° вокруг любого серединного перпендикуляра отрезка AB; симметрия относительно плоскости серединных перпендикуляров отрезка AB. **1.119.** *Указание. Рассмотрите положения отрезков* AB и A_1B_1. *Возможно использование композиции одного из движений, примененных в задаче 1.118, и вращения вокруг некоторой прямой.* **1.120.** *Указание. Отобразив отрезок AB на отрезок A_1B_1, воспользуйтесь последующим вращением вокруг прямой* A_1B_1. **1.121.** Центральная симметрия относительно точки K (4; 4; −1); перенос на вектор $\vec{a}$ (6; 2; 0); симметрия относительно плоскости $3x+y-16=0$; поворот на угол 180° вокруг прямой, заданной системой уравнений: $x=4-t$, $y=4+3t$, $z=-1$. **1.122.** H (3; −2; 1). **1.131.** *Указание. Воспользуйтесь инвариантностью углов и отношений длин отрезков при подобии.* **1.132.** Да. **1.134.** $k=\frac{1}{3}$. **1.135.** *Указание. Рассмотрите случаи, когда плоскости* α *и* β *параллельны, пересекаются.* **1.136.** 1. а), г), д); 2. а) Неподвижна каждая точка оси Oz; неподвижна любая прямая, перпендикулярная оси Oz; неподвижна любая плоскость, перпендикулярная оси Oz или проходящая через эту ось; б) неподвижной является каждая точка (x; y; z), расположенная в полупространстве $y > 0$; неподвижной является любая прямая и любая плоскость полупространства $y > 0$, параллельная координатной плоскости Oxz; в) неподвижной является каждая точка оси Oy; г) неподвижной является каждая точка плоскости, проходящей через ось Oz и биссектрису первого и третьего координатных углов координатной плоскости Oxy; неподвижной прямой и неподвижной плоскостью является любая прямая и любая плоскость, перпендикулярные этой биссекторной плоскости; д) неподвижной является любая точка координатной плоскости Qxz, а неподвижной прямой и неподвижной плоскостью — любая прямая и соответственно любая плоскость, перпендикулярные плоскости $y = 0$. **1.140.** Да. **1.143.** *Указание. Допустив у фигуры наличие двух центров симметрии, найдите точки пересечения границы фигуры с прямой, проходящей через эти центры.* **1.144.** Да. **1.145.** *Указание. Допустите противное и проведите через центр и ось симметрии плоскость.* **1.146.** 24 поворота. *Указание. Рассмотрите повороты, осями которых являются прямые, проходящие через диагонали куба, а также через центры противоположных граней и середины противоположных ребер.* **1.148.** *Указание. Рассмотрите поворот вокруг прямой l, при котором образ точки A окажется в плоскости, определяемой прямой l и точкой C.* **1.150.** Может, если вектор переноса параллелен диагонали куба. **1.155.** *Указание. Постройте точки, симметричные точке M относительно плоскостей α и β.* **1.156.** а) $\frac{V}{8}$; б) $\frac{15V}{8}$.

Глава 2. Многогранники

2.002. Выпуклым телом. **2.003.** Тор. **2.004.** *Указание. Рассмотрите сечение:* а) *куба*; б) *правильного тетраэдра.* **2.005.** Тетраэдр. **2.006.** а) Да; б) нет. **2.007.** а) 10; б) 6. **2.010.** 14 ребер, 7 граней и 9 вершин. **2.011.** Образовалось 1000 кубов, из которых 512 не имеют окрашенных граней, 384 имеют одну окрашенную грань, 96 — две окрашенных грани, 8 — три окрашенных грани, а кубов, у которых окрашено более трех граней, нет. **2.012.** Два ребра по 5 и четыре по 6,5; площадь 60. **2.013.** Вершин — 50; граней — 51. **2.014.** Граней — 87; вершин — 170. **2.015.** а) M — внешняя точка тетраэдра; б) M — внутренняя точка тетраэдра. **2.017.** *Указание. Пусть n — число граней данного многогранника. Если все грани многогранника — треугольники, то число всех ребер равно $\frac{3n}{2}$, т. е. делится на 2. Если же хотя бы одна грань — не треугольник, то число ребер не меньше 8.* **2.018.** а) *Указание. Пусть существует многогранник, у которого число граней с нечетным числом сторон нечетно. Тогда число всех сторон всех граней этого многогранника нечетно. Но так как каждое ребро многогранника является общим ровно для двух граней, то общее число всех различных сторон всех граней многогранника четно.* **2.018.** б) *Указание. Предположим, что существует многогранник с нечетным числом вершин, в каждой из которых сходится нечетное число ребер. Тогда общее число всех сторон всех граней должно быть нечетно. Но каждое ребро многогранника является общим ровно для двух вершин, поэтому общее число всех сторон всех граней многогранника кратно 2, т. е. четно.* **2.020.** 45°. **2.021.** $8\sqrt{21}$ см^2. **2.022.** 144. **2.023.** 4,5 см. **2.024.** $Q\sqrt{2}$. **2.025.** $Q\sqrt{2}$.

2.026. $\cos\varphi = \frac{|2h^2 - a^2|}{2(a^2+h^2)}$. **2.028.** а) $10\sqrt{6}$ см; б) $200\sqrt{2}$ см^2; в) $100\sqrt{5}$ см^2; г) $100\sqrt{2}$ см^2. **2.029.** $16\sqrt{7}$ см^2. **2.030.** 580 см^2. **2.031.** а) $a^2\sqrt{6}$; б) $3a^2$. **2.032.** а) 45°; б) $\frac{a^2\sqrt{3}}{4}$; в) $\frac{a^2}{2}$. **2.033.** $2\sqrt{3}$ см^2. **2.035.** $80\sqrt{2}$ см^2. **2.036.** $\frac{a^2\sqrt{2}}{2}$. **2.037.** $6\sqrt{3}$ дм^2. **2.038.** $\frac{4a^2\sqrt{3}}{9}$; 60°. **2.039.** $\frac{154\sqrt{2}}{3}$ см^2. **2.040.** 3 см. **2.041.** 2 см. **2.042.** 25 см; 25 см; 30 см; 24 см. **2.044.** 864 см^2; б) 144 см^2; в) $144\sqrt{2}$ см^2. **2.045.** 4 м. **2.046.** а) 4 м; б) $8(6+\sqrt{3})$ м^2. **2.048.** а) 3 м; б) 4 м; в) $\sqrt{34}$ м; г) $12\sqrt{2}$ м^2. **2.049.** а) $3ab + \frac{a^2\sqrt{3}}{2}$; б) $4ab + 2a^2$; в) $6ab + 3a^2\sqrt{3}$. **2.051.** а) $150 \times \times (7 + 2\sqrt{2})$; б) $75\sqrt{53}$; в) 45°; 45°; 135°; 135°. **2.052.** 75 см^2; $7{,}5(10 + \sqrt{3})$ см^2. **2.053.** 2016 см^2. **2.054.** а) $\frac{a^2\sqrt{6}}{2}$; б) $a^2\sqrt{2}$. **2.055.** $2a\sqrt{Q}(\sqrt{2} + 1)$. **2.056.** 5 см; 12 см; 13 см; $60\sqrt{14}$ см^2. **2.057.** $6\sqrt{Q^2 - S^2}$. **2.058.** $28(\sqrt{3}+1)$. **2.059.** 78. **2.061.** $\frac{a^3}{8}$. **2.062.** $\frac{3}{2}a$. **2.063.** 36 см^3. **2.064.** а) 36 дм^3; б) 36 см^3; в) 36 см^3. **2.065.** 7320 см^3. **2.067.** $486\sqrt{3}$ см^3. **2.068.** $36\sqrt{3}$ см^3. **2.069.** 3072 см^3. **2.070.** 720 см^3. **2.073.** 2 см. **2.074.** 2520 см^3. **2.075.** $504\sqrt{2}$ см^3. **2.076.** $\frac{1}{8}a^3\sqrt{2}$; $\frac{1}{2}a^2(2+\sqrt{2})$. **2.077.** $\frac{ac}{8}\sqrt{12a^2 - 3c^2}$. **2.078.** $\frac{d^3}{4}\sin 2\beta \cos\beta \operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}$. **2.083.** 5 см; 7 см. **2.084.** 2 м^2. **2.085.** 13 м; 9 м. **2.086.** 2. **2.087.** 8 см; 10 см. **2.089.** 2 м^2; 3 м^2. *Указание. Воспользуйтесь свойством диагоналей параллелограмма.* **2.091.** 4. **2.092.** 1. **2.093.** $A(0;\ 0;\ -1)$; $C_1(3;\ 3;\ 2)$; $D(3;\ 0;\ -1)$; $B(0;\ 3;\ -1)$; $C(3;\ 3;\ -1)$. **2.094.** $\frac{a\sqrt{3}}{3}$. **2.095.** $al\sqrt{2}$; $a\sqrt{2l^2 - a^2}$. **2.096.** 13. **2.097.** а) $100\sqrt{3}$; $100\sqrt{6+3\sqrt{3}}$; б) $100\sqrt{3}(\sqrt{3} + \sqrt{2} + 1)$; $50\ (7 + 3\sqrt{3} + 2\sqrt{6})$; в) $25\sqrt{13}(1 + \sqrt{3})$; $25\sqrt{28+2\sqrt{3}}$. **2.097.** *Указание.* BDD_1B_1 — *прямоугольник.* **2.099.** $\arcsin\sqrt{1 - \sin^2\alpha - \sin^2\beta}$. **2.103.** 20. **2.104.** 188 м^2. **2.105.** 1416 см^2. **2.107.** а) 13 см; б) 442 см^2; в) 562 см^2. **2.109.** а) $4\sqrt{3}$; б) $5\sqrt{3}$; в) $\frac{\sqrt{15}}{2}$. **2.100.** 288 см^2. **2.111.** 76 см^2. *Указание. Найдите диагонали боковой грани, пользуясь свойством диагоналей параллелограмма, в котором лежат обе диагонали параллелепипеда.* **2.112.** 1440 см^2. **2.113.** 18 см. **2.114.** 1056 см^2. **2.215.** 960 см^2. **2.116.** 198 см^2. **2.117.** 336 см^2. **2.118.** 288 см^2.

2.119. а) $4ab\sin\beta$; б) $2ab\sin\frac{\alpha}{2}$; в) $\dfrac{a\sqrt{\sin\left(\beta+\frac{\alpha}{2}\right)\sin\left(\beta-\frac{\alpha}{2}\right)}}{\cos\frac{\alpha}{2}}$. *Указание. Докажите, что меньшее диагональное сечение параллелепипеда — прямоугольник.* **2.120.** $\dfrac{2\sqrt{2}l^2\cos\left(\varphi-\frac{\pi}{4}\right)\sqrt{\sin(\theta+\varphi)\sin(\theta-\varphi)}}{\cos\theta}$.
2.121. 432 см². **2.122.** 32 см. **2.123.** $2a^2+2a\sqrt{4b^2-a^2}$.
2.125. 360 см²; 108 см²; 156 см². **2.126.** $105\sqrt{7}$. **2.127.** $2b^2(1+\sqrt{3})$.
2.128. а) 144; б) $32\sqrt{3}$. **2.130.** 24 дм³. **2.131.** 6 см. **2.132.** Половине объема куба. **2.133.** а) $\sqrt[3]{2}$; б) $\sqrt[3]{3}$; в) $\sqrt[3]{n}$. **2.134.** 4500 см².
2.135. 60 м³. **2.136.** $12\sqrt{7}$. **2.137.** 48. **2.138.** $8\frac{7}{9}$ см³. **2.139.** 27 см³.
2.140. а) 10 м³; б) $\sqrt{Q_1Q_2Q_3}$. **2.141.** $\frac{l^3\sqrt{2}}{8}$. **2.142.** 288 см³.
2.143. 30. **2.144.** $m^3\sin\alpha\sin\beta\sqrt{\cos(\beta+\alpha)\cos(\beta-\alpha)}$.
2.145. 3 см. **2.146.** $48\sqrt{11}$ см³. **2.147.** 105 м³. **2.148.** 160 см³.
2.150. $\dfrac{H^3\sin\beta\sqrt{\cos(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta)}}{\sin^2\alpha}$. **2.151.** $\dfrac{\sqrt{2}p^3\sin2\alpha\sin2\beta\cos\beta}{128\cos^3(\beta-45^\circ)}$.
2.152. $\dfrac{abQ}{4(a+b)}$. **2.153.** $324\sqrt{3}$. **2.154.** 360. **2.155.** 780. **2.156.** а) 3 м³; б) $\sqrt{\dfrac{Q_1Q_2Q_3}{2}}$. **2.157.** 432 см³; 384 см². **2.158.** 9360 см³. **2.159.** 60.
2.160. 200 дм³. **2.161.** $\sqrt{2}$ м³. **2.162.** $\frac{a^3}{2}$. **2.163.** $abc\sqrt{-\cos2\alpha}$.
2.165. $\sqrt{3}(a+b)c$; $\frac{abc\sqrt{2}}{2}$; 45°. **2.166.** 10 см; 17 см. **2.167.** 4 см³ и 16 см². **2.168.** $2V$. **2.169.** 25 см. **2.171.** (35°; 135°). **2.173.** (0°; 150°).
2.174. (0°; 72°) **2.175.** $\arccos\dfrac{\cos\alpha}{2\cos^2\frac{\alpha}{2}}$;

α	30°	45°	60°	90°
	$\arccos(2\sqrt{3}-3)$	$\arccos(\sqrt{2}-1)$	$\arccos\frac{1}{3}$	90°

2.176. а) $a\sqrt{3}$; б) $a\sqrt{\frac{3}{2}}$; в) $\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{2}}{2}$; г) $\operatorname{arcctg}\frac{\sqrt{2}}{2}$. **2.177.** $2\arcsin\sqrt{\frac{2}{3}}$.
2.178. $\arccos\dfrac{\sqrt{\cos^2\alpha+\cos^2\beta-2\cos\alpha\cdot\cos\beta\cdot\cos\varphi}}{\sin\varphi}$. **2.178.** $\sqrt{3(1+2\cos\alpha)}$.

2.180. $\sqrt{3+2\cos\alpha+2\cos\beta+2\cos\gamma}$. **2.181.** а) $3a$; б) $a\sqrt{3}$; в) $\arcsin\frac{1}{3}$; г) $\arcsin\frac{\sqrt{3}}{3}$. **2.182.** $2\arcsin\frac{\sqrt{2}}{2\cos\frac{\alpha}{2}}$. **2.183.** $90°$.

2.184. $2\arccos\frac{\sqrt{3}}{3}$. **2.185.** а) (1; −3; 5); б) 8; в) $\begin{cases}x=1+4t,\\ y=-3-3t,\\ z=5+2t;\end{cases}$ $\begin{cases}x=1-2u,\\ y=-3+5u,\\ z=5+6u;\end{cases}$ $\begin{cases}x=1-4u,\\ y=-3+3u,\\ z=5+5u;\end{cases}$ г) $\begin{cases}2x+2y-z>0,\\ 3x+4y+9>0,\\ x-2y+2z<0;\end{cases}$ д) для оси абсцисс — это отрезок MP, где $M(-3;\ 0;\ 0)$, $P(17;\ 0;\ 0)$; для оси ординат — луч с началом $K(0;\ -2{,}25;\ 0)$, содержащий начало координат; для оси аппликат — луч с началом $E(0;\ 0;\ 8{,}5)$, содержащий начало координат.

2.186. 320. **2.187.** 12. **2.188.** 12. **2.189.** $\frac{2\sqrt{31}}{3}$. **2.190.** $\sqrt{26}$; $\sqrt{13}$.

2.191. $\frac{14\sqrt{1679}}{25\sqrt{3}}$; $\frac{14\sqrt{1679}}{25\sqrt{3}}$; $\frac{25\sqrt{1679}}{48}$; $\frac{25\sqrt{1679}}{48}$. **2.192.** а) 2,4; б) $2{,}4\sqrt{2}$; в) $2{,}4\sqrt{2}$; г) $\frac{10\sqrt{26}}{3}$. **2.193.** $\frac{2\sqrt{3}}{3}$. **2.194.** 45°; 45°; 135°. **2.195.** $\frac{4\sqrt{3}}{3}$; $\frac{14\sqrt{3}}{3}$; $3{,}5\sqrt{3}$; $4\sqrt{3}$. **2.196.** $\operatorname{arctg}\frac{2\left(1+\sin\frac{\alpha}{2}\right)}{\sin\alpha}$; $\operatorname{arctg}\frac{1+\cos\alpha}{\sin 2\alpha}$.

2.197. 3. **2.198.** $\sqrt{10}$. **2.199.** 97. **2.200.** 7 дм; 12 дм. **2.201.** 5; 6.

2.202. 13 см. **2.203.** 1 или $\sqrt{2}$. **2.204.** 2,5. **2.205.** $0{,}5a$. **2.206.** $\frac{a\sqrt{3}}{4}$.

2.207. $\frac{a}{\operatorname{ctg}\alpha+\operatorname{ctg}\beta}$. **2.208.** $\frac{b\cdot\sin\alpha\cdot\operatorname{tg}\beta}{1+2\sin\frac{\alpha}{2}}$ или $0{,}5\cdot b\cdot\sin\alpha\cdot\operatorname{tg}\beta$.

2.209. a. **2.210.** 3 или $2\sqrt{3}$. **2.211.** $b\cdot\cos\frac{\alpha}{2}\cdot\operatorname{tg}\beta$ или $b\cdot\sin\alpha\cdot\operatorname{tg}\beta$.

2.212. 1. **2.213.** $\frac{336}{625}a$. **2.214.** 90°; $\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{3}}{2\sin\alpha}$; $\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{3}}{\sin\alpha}$; $\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{3}}{\sin\alpha}$. **2.215.** $64+\frac{128}{\sqrt{3}}$. **2.216.** $9\frac{55}{238}$. **2.217.** а) a^2; б) $\frac{a\sqrt{5}}{2}\operatorname{ctg}\alpha$.

2.218. $a\sqrt{3}$. **2.219.** $1{,}5a$. **2.220.** $\frac{a\sqrt{3}}{2}$; $a\sqrt{3}$. **2.221.** 90°; 90°; 90°; $\operatorname{arctg}\frac{4\sqrt{34}}{15}$; $\operatorname{arctg}\frac{3\sqrt{41}}{20}$; $\operatorname{arctg}\frac{25}{12}$. **2.222.** $a\sqrt{19}$; $a\sqrt{19}$; $4a$; $4a$; $a\sqrt{13}$; $a\sqrt{13}$. **2.223.** 180°. **2.224.** а) $\frac{a}{2}\operatorname{tg}\alpha$; б) $\operatorname{arctg}\frac{\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{tg}\beta}{\sqrt{\operatorname{tg}^2\alpha+\operatorname{tg}^2\beta}}$. **2.225.** $\sqrt{85}$; $\sqrt{85}$; $\sqrt{37}$; $\sqrt{229}$. **2.226.** 8. **2.227.** 3. **2.228.** 6 и $3\sqrt{3}$. **2.229.** 9 см.

2.230. а) $\sqrt{b^2-\frac{a^2}{3}}$; б) $\sqrt{b^2-\frac{a^2}{2}}$; в) $\sqrt{b^2-a^2}$. **2.231.** а) $\arccos\left(\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\right)$;

б) $\arccos\left(-\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}\right)$; в) $\arccos\left(-\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}\right)$; г) $2\arcsin\left(\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\right)$; д) $\frac{a\sqrt{\cos\alpha}}{2\sin\frac{\alpha}{2}}$;

е) $\frac{a\sqrt{\cos\alpha}}{2\cos\frac{\alpha}{2}}$; ж) $\frac{a\sqrt{\cos\alpha}}{\cos\frac{\alpha}{2}}$; з) $\arcsin\left(2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\sqrt{\cos\alpha}\right)$; и) $\arcsin\frac{\sqrt{\cos\alpha}}{\cos\frac{\alpha}{2}}$;

к) $\frac{a\sqrt{\cos\alpha}}{2\cos\frac{\alpha}{2}}$; л) $\arcsin\frac{2\sqrt{\cos\alpha}}{\cos\frac{\alpha}{2}\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}}$; м) $\frac{a\sqrt{\cos\alpha}}{2\sin\frac{\alpha}{2}}$; $\frac{a\sqrt{\cos\alpha}}{\cos\frac{\alpha}{2}}$; $\frac{a\sqrt{\cos\alpha}}{\cos\frac{\alpha}{2}}$; $\frac{a\sqrt{2}}{2}$;

н) $\frac{a\sqrt{\cos\alpha}}{2\sin\frac{\alpha}{2}}$; $\frac{a\sqrt{\cos\alpha}}{\cos\frac{\alpha}{2}}$; $\frac{a\sqrt{2}}{4}$; $a\cdot\sqrt{\frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}{5-4\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}}$. **2.232.** 8 вершин; 7 граней; 13 ребер. **2.233.** а) $\sqrt{3}$; б) 45° или 60°. **2.234.** $\frac{(2\sqrt{3}-3)b}{3}$. **2.235.** Нет. **2.236.** $\frac{2}{\sqrt{3}}$. **2.237.** $\frac{ah}{a+h}$. **2.238.** а) $\frac{1}{2}\sqrt{4h^2+\frac{a^2}{3}}$; б) $\frac{1}{2}\sqrt{4h^2+a^2}$; в) $\frac{1}{2}\sqrt{4h^2+3a^2}$. **2.239.** 45°. **2.240.** 3. **2.241.** $\frac{3a\sqrt{2}}{4}$. **2.242.** 24 м²; 30°. **2.243.** а) $\frac{(a+b)^2}{4\cos\alpha}$; б) $\frac{4a^2b^2}{(a+b)^2}$. **2.244.** $\frac{3a^2h}{4\sqrt{a^2+3h^2}}$. **2.246.** $\frac{a^2\sqrt{3}}{3}$. *Указание. В сечении получается четырехугольник с взаимно перпендикулярными диагоналями.* **2.247.** $\frac{11a\sqrt{3a^2+h^2}}{18}$. **2.248.** $\frac{25Q}{16}$. *Указание. Сечение — многоугольник, являющийся объединением двух трапеций с общим основанием.* **2.249.** 288 см². **2.250.** а) $\frac{3a}{4}\sqrt{4h^2+\frac{a^2}{3}}+\frac{a^2\sqrt{3}}{4}$; б) $a\sqrt{4h^2+a^2}+a^2$; в) $\frac{3a}{2}\sqrt{4h^2+3a^2}+\frac{3a^2\sqrt{3}}{2}$. **2.251.** $\frac{1}{4}a^2\sqrt{15}$. **2.251.** 12 см и 8 см; 16 см и 6 см. **2.253.** $2(11+\sqrt{34})$. **2.254.** 448 см². **2.255.** 2 дм; 24 дм². **2.256.** $\frac{16Q}{3}$. **2.257.** $\frac{3a^2}{2}$. **2.258.** $8(3+3\sqrt{3}+\sqrt{6})$ см². **2.259.** 17 см; 28 см. **2.260.** $8h^2$. **2.261.** $72(1+\sqrt{7})$ см². **2.262.** $\frac{a^2(\sqrt{3}+\sqrt{15})}{4}$. **2.263.** 1440 см². **2.264.** 26; 50. **2.265.** 4 : 5. **2.267.** 1344 см². **2.268.** а) 180 дм²; б) 28 дм². **2.269.** $3\sqrt{3}(1+\sqrt{2})h^2$. **2.270.** $2h^2\operatorname{tg}\alpha$. **2.271.** $4h^2\operatorname{tg}^2\varphi\cdot\frac{1+\sin\varphi}{\sin\varphi}$. **2.272.** 48 см². **2.273.** $60+25\sqrt{3}$. **2.274.** $\frac{a^2-b^2}{4}$. **2.275.** 125 см². **2.276.** 18 см. **2.277.** 192 см². **2.278.** $\frac{1}{6}V$. **2.281.** $\frac{2}{3}b^3\sin\alpha\cos^2\alpha$. **2.282.** $\frac{4}{3}h^3\sin^2\beta\cos\beta$. **2.283.** 18.

2.285. $\frac{4}{9}$. **2.286.** $80\sqrt{2}$. **2.287.** 10 м^3. **2.288.** 13. **2.289.** 4 см^3. **2.290.** 36. **2.291.** $4\sqrt{3}$. **2.292.** $\frac{3a^3}{8}$. **2.293.** $\frac{\sqrt{6}}{36}$. **2.294.** $C(-3;\ 0;\ 0)$, $D(0;\ 3;\ 0)$; объем равен 36. **2.295.** 7. **2.296.** $\frac{a^3\sqrt{2}}{12}$. **2.297.** $132\sqrt{3}$ см^3. **2.298.** а) $\frac{a^3}{12}$; б) $\frac{\sqrt{3}h^3}{3}$. **2.299.** $\sqrt[3]{\frac{2}{3}V}$; 60°. **2.300.** $96\sqrt{3}$ см^3. **2.301.** 1800 см^3. **2.302.** 60 см^2. **2.303.** 500 см^3. **2.304.** 16 дм^3. **2.305.** $\frac{a^3\sqrt{2}}{24}$. **2.306.** $\frac{a^3\sqrt{2}}{24}$. **2.307.** $\frac{9a^3\sqrt{11}}{32}$. **2.308.** 3 дм^3. **2.309.** $\frac{4p^2\sqrt{2}}{81}$. **2.310.** 1 : 9; 1 : 27. **2.311.** 576 см^3. **2.312.** 480 дм^3. **2.313.** $\frac{a^3\sin^2\alpha\ \mathrm{tg}\,\beta}{6\left(1+2\sin\frac{\alpha}{2}\right)}$. **2.314.** $\frac{\sqrt{2}}{6}\mathrm{tg}\,\alpha\left(\frac{Q}{\sqrt{2\,\mathrm{tg}^2\alpha+1}}\right)$. **2.315.** $\frac{2}{3}R^3\sin\alpha\times$ $\times\sin\beta\sin(\alpha+\beta)\,\mathrm{tg}\,\gamma$. **2.316.** $\frac{4\sqrt{3}}{3}$. **2.318.** Каждая пирамида имеет объем $0{,}5V$. **2.319.** k^3. **2.320.** 12. **2.321.** $\frac{V}{27}$; $\frac{7V}{27}$; $\frac{19V}{27}$. **2.322.** 1 : 1. **2.323.** $\frac{46\sqrt{2}}{3}$. **2.324.** 5 м^3. **2.325.** 10. **2.326.** $\frac{1}{6}V$; $\frac{1}{6}V$; $\frac{1}{6}V$; $\frac{1}{6}V$ и $\frac{1}{3}V$. **2.328.** 67 м^3. **2.329.** 2 м. **2.330.** 28 м^3. **2.331.** 3 : 5. **2.332.** 5 : 5. **2.333.** $2\sqrt{2}$; $2\sqrt{2}$. **2.334.** $\frac{2\sqrt{6}}{3}$. **2.335.** $\sqrt{42}$; $\frac{\sqrt{2c^2+(a-b)^2}}{2}$. **2.336.** $\sqrt{c^2-(a-b)^2}$; $c > a - b$. **2.337.** 2,4; 3,2; 4. **2.338.** 2 : 3. **2.339.** 4; $2\sqrt{2}$; $2\sqrt{2}$. **2.340.** а) $\frac{\sqrt{2}}{6}(a^3 - b^3)\mathrm{tg}\,\alpha$; б) $\frac{1}{24}(a^3 - b^3)\mathrm{tg}\,\alpha$. **2.341.** 840 см^3. **2.342.** $289\frac{1}{3}$ см^3. **2.343.** Вообще говоря, нет. **2.344.** Только правильный тетраэдр (куб). **2.345.** Нет. **2.346.** Да. **2.350.** $27\sqrt{3}$. **2.351.** *Указание. Рассмотрите отрезок, соединяющий центры параллельных граней куба.* **2.352.** а) Параллелограмм; б) прямоугольник; в) квадрат. **2.356.** $a^2\sqrt{3}$. **2.357.** $\frac{4a^2}{3}$. **2.358.** $\frac{2S}{3\sqrt{3}}$. **2.359.** $\frac{a^2\sqrt{3}}{9}$. **2.384.** 1120 см^2. **2.385.** $H^3\sqrt{3}$. *Указание. Найдите дважды квадрат большей диагонали основания призмы.* **2.386.** 960 см^3; 448 см^2. **2.387.** 240 см^3. **2.388.** 5,4 дм^3. **2.389.** 7,2 дм^3. **2.390.** $2\sqrt{\sin 3\alpha\ \sin^3\alpha}$. **2.391.** 12 096 см^3. **2.392.** 80 см^2. **2.393.** 1 : 3. **2.395.** $2d^2\sin\varphi\cdot(\cos\theta+\sqrt{\sin(\theta+\varphi)\sin(\theta-\varphi)})$. **2.398.** а) $\frac{(a+b)^2}{4\cos\alpha}$; б) $\frac{4a^2b^2}{(a+b)^2}$. **2.399.** $\frac{3a^2h}{4\sqrt{a^2+3h^2}}$. **2.400.** $\frac{a^2\sqrt{3}}{3}$. *Указание. В сечении по-*

лучается четырехугольник с взаимно перпендикулярными диагоналями. **2.402.** $3\sqrt{41}$. **2.403.** Нет. *Указание. Рассмотрите пирамиду PABD, в основании которой правильный треугольник ABD, а высотой является отрезок PC, где точка C — вершина ромба ABCD.*

Глава 3. Фигуры вращения

3.001. Имеет. **3.002.** 5 см. **3.003.** $\frac{\pi Q}{4}$. **3.004.** 36 м^2. **3.005.** 3 дм. **3.006.** Нет. **3.007.** а) 24 см; б) $12\sqrt{3}$ см; в) 432π см^2. **3.008.** $40\sqrt{3}$ см^2. **3.009.** 15 дм. **3.010.** а) 3 дм; б) 5 см. **3.011.** $1 : \cos\varphi$. **3.012.** $\sqrt{H^2+4R^2}$ или H. **3.013.** 15 или $\frac{15}{7}$. **3.014.** $\sqrt{R^2-\left(\frac{Q}{2R}\right)^2}$. **3.015.** 90°. **3.016.** $\sqrt{Q^2-4H^2d^2}$. **3.017.** 3 дм. **3.018.** 10 м. **3.019.** $\sqrt{2}Q$. **3.020.** πQ. **3.021.** 3 и $\frac{4}{\pi}$. **3.022.** 18 см; 6 см. **3.023.** $\frac{1}{2}a^2\sin\varphi$; $\frac{a^2}{2}\left(\sin\varphi + \pi\sin^2\frac{\varphi}{2}\right)$ или $\frac{a^2}{2}\left(\sin\varphi + \pi\cos^2\frac{\varphi}{2}\right)$. **3.024.** $4Q\operatorname{ctg}\varphi$. **3.025.** $\frac{Q}{\pi}$. **3.026.** а) $\frac{a^2\cos\varphi(2\pi\sin\varphi+\cos\varphi)}{2\pi}$; б) $\varphi \approx 40°90'$. **3.027.** б) $b : a$. **3.028.** а) $4\sqrt{3}\pi$; б) $\frac{2}{3}\sqrt{12\pi^2+81}$; в) $\sqrt{3}$. **3.030.** А. 1) $\frac{3\sqrt{3}}{2\pi}$; 2) $\frac{2\sqrt{2}}{\pi}$; 3) $\frac{1+\sqrt{2}}{\pi}$; Б. 1) $\frac{3\sqrt{3}}{2\pi}$; 2) $\frac{4}{\pi}$; 3) $\frac{3+2\sqrt{2}}{\pi}$. **3.031.** а) $\frac{n\sin\frac{180°}{n}}{\pi}\cdot Q$; $\frac{n\operatorname{tg}\frac{180°}{n}}{\pi}\cdot Q$; б) $\cos\frac{180°}{n}$. **3.033.** 8 см. **3.034.** $\frac{3}{4}\pi a^3$. **3.035.** 50π. **3.036.** 4 : 1. **3.037.** $\frac{\pi a^2 H}{4\cos^2\alpha}$. **3.038.** 768π см^3. **3.039.** 720π см^3. **3.040.** $\frac{\pi a^3\sqrt{6}}{9}$; $\frac{2\pi a^2\sqrt{2}}{3}$. **3.041.** $\frac{\pi p^3}{32}$. **3.042.** а) 5 м; б) 20π. **3.043.** а) $\frac{l\sqrt{3}}{2}$; б) $\frac{l}{2}$; в) $\frac{\pi l^2\sqrt{3}}{2}$. **3.044.** R^2. **3.045.** 45°. **3.046.** $\pi\cdot r^2 + \frac{\pi\cdot r^2}{\sin\frac{\alpha}{2}}$. **3.047.** б) $\frac{R^2\sqrt{3}}{2}$. **3.048.** $\frac{60}{13}$. **3.049.** 3 см. **3.050.** 500. **3.051.** а) R^2; б) $\sqrt{2}R^2$. **3.052.** $4\sqrt{6}$ см^2. **3.053.** $\frac{R^2\sin\alpha\sqrt{\cos(\alpha+\varphi)\cos(\alpha-\varphi)}}{\cos^2\alpha\cos^2\varphi}$. **3.054.** $2\arccos\left(\frac{\cos\frac{\alpha}{2}}{\cos\beta}\right)$. **3.055.** $\arcsin\left(\sqrt{2}\sin\frac{\alpha}{4}\sin\left(45°-\frac{\alpha}{4}\right)\right)$. **3.056.** 216°. **3.057.** 1 м.

3.058. 180°. **3.059.** 2arcsin $\frac{1}{4}$; 2arcsin $\frac{1}{6}$. **3.060.** 2 : 1. **3.061.** $\frac{R}{l}360°$. **3.062.** 30°. **3.063.** $\frac{3}{\pi}$. **3.064.** 5 : 4. **3.065.** 1 : 2 : 3. **3.066.** 2 : 3. **3.067.** а) $\frac{h\sqrt{1+\sin^2\alpha}}{\cos\alpha}$; б) $\pi\sqrt{2+2\sin^2\alpha}$. **3.068.** 8 см; 11 см; 11 см. **3.069.** $40\sqrt{3}\pi$ см^2. **3.070.** а) $\frac{\sqrt{2}}{2}H$; б) $\frac{\sqrt{3}}{3}H$; в) $\frac{1}{2}H$. **3.071.** а) $\frac{1}{4}\pi R^2$; б) $\frac{4}{25}\pi R^2$; в) $\left(\frac{m}{m+n}\right)^2\pi R^2$. **3.072.** а) 5; б) 45π. **3.073.** а) $R - r$; б) $(R-r)\sqrt{2}$; в) $\pi(R^2-r^2)\sqrt{2}$. **3.074.** $2\pi(R^2-r^2)$. **3.075.** $12\sqrt{10}\pi$ см^2; $4(3\sqrt{10}+5)\pi$ см^2. **3.076.** 9 м^2. **3.077.** $\frac{SH}{\pi l}$. **3.078.** $33\sqrt{2}\pi$ см^2; $(22\sqrt{2} + 65)\pi$ см^2. **3.079.** а) $\frac{5\pi d^2\sqrt{2}}{16}$; б) $\frac{5\pi d^2}{32}$. **3.081.** а) $\frac{9\sqrt{3}}{4}(\sqrt{73}+3)$ см^2; б) $(18+6\sqrt{41})$ см^2; $\frac{9}{2}(\sqrt{91}+3\sqrt{3})$ см^2. **3.082.** 20 см. **3.083.** а) $\frac{HR\sqrt{2}}{R\sqrt{2}+H}$; б) $\frac{RH\sqrt{3}}{R\sqrt{3}+H}$. **3.084.** $\frac{1}{12}\pi H^3$. **3.085.** 240π см^3 или 100π см^3. **3.087.** 16π см^3. **3.088.** 900π см^3. **3.089.** 84π м^3. **3.090.** $\frac{\pi}{3}(R^3-r^3)$. **3.091.** 3840π см^3; 1560π см^2. **3.092.** 420π см^2. **3.093.** 268π см^3. *Указание. Сумма радиусов оснований равна 9, а их произведение — 14.* **3.094.** $\frac{\pi a^3}{4}$. **3.095.** $\frac{225\pi}{7}$ дм^3. **3.096.** $1{,}6\pi$ дм^3; $13{,}2\pi$ дм^2. **3.097.** 62 : 109. **3.098.** 1456π см^3; 220π см^2. **3.099.** 3360π см^3; 1140π см^2. **3.100.** 9π. **3.101.** $12\pi\sqrt{3}$. **3.102.** 81 м^3. **3.103.** Плоскость, проходящая перпендикулярно отрезку AB через его середину. **3.104.** Внутренность большого круга, плоскость которого перпендикулярна AB. **3.105.** Сфера радиуса $\sqrt{R^2-r^2}$ с центром в центре данного шара. **3.107.** Сфера радиуса $\sqrt{R^2-r^2}$ с центром в центре данного шара. **3.108.** Сфера с диаметром AB. **3.109.** *Указание. Используйте центр окружности, описанной около данного многоугольника.* **3.112.** а) $40\sqrt{2}$ см; б) 16 см; в) 160 см; г) $\sqrt{a^2-b^2}$. **3.113.** 6. **3.117.** $(x+1)^2+(y-2)^2+(z-1)^2=3$ и $x^2+(y-3)^2+(z-2)^2=3$. **3.118.** $(4; -1; -3)$; $\sqrt{26}$. **3.119.** Если $a < -5$ — пустое множество; если $a = -5$ — точка $(-2; 1; 0)$, если $a > -5$ — сфера радиуса $\sqrt{a+5}$ с центром $(-2; 1; 0)$. **3.120.** Если $a \in (-2; 2)$ — пустое множество; если $a = -2$ — точка $(2; 0; 2)$; если $a = 2$ — точка $(-2; 0; 2)$; если $a \in (-\infty; -2) \cup (2; +\infty)$ — сфера радиуса $\sqrt{a^2-4}$ с центром $(-a; 0; 2)$. **3.121.** $25\frac{11}{13}\pi$. **3.122.** $2x+4y+4z-9=0$. **3.123.** $6x-8y-47=0$.

3.124. (1; 0; 0); (0; $-3+2\sqrt{2}$; 0); (0; $-3-2\sqrt{2}$; 0). **3.125.** $2\sqrt{11}$. **3.126.** $x+y+2z=0$. **3.127.** $x+2y+2z-11=0$. **3.128.** $z=0$, $A(0; 3; 4)$ или $24y+7z=0$, $B(0; -0{,}84; 2{,}88)$. **3.129.** $(x-1)^2+(y-1)^2+(z-2)^2=6$ или $(x-1)^2+(y-1)^2+(z-2)^2=54$. **3.130.** $(x-5)^2+(y-1)^2+(z-1)^2=12$ или $(x-5)^2+(y-1)^2+(z-1)^2=48$. **3.131.** $(x-1)^2+(y-1)^2+(z-\sqrt{2})^2=1$. **3.132.** Множество всех точек сферы радиуса $\sqrt{26}$ с центром (2; −1; 3) за исключением точек A и B — концов диаметра AB. **3.133.** Множество всех внутренних точек шара радиуса $\sqrt{6}$ с центром (2; 1; 1) за исключением точек диаметра AC. **3.134.** Все точки $K(x; y; z)$, лежащие вне шара $x^2+y^2+(z-2)^2 \leqslant 9$, за исключением тех из них, которые лежат на прямой $\frac{x-1}{1}=\frac{y-2}{2}=\frac{z}{-2}$, содержащей точки M и N. **3.135.** $(x-1)^2+y^2+(z+2)^2=1$ и $(x-1)^2+y^2+(z+2)^2=25$. **3.136.** Множество всех точек сферы радиуса $\sqrt{6}$ с центром $\left(\frac{2}{3}; \frac{2}{3}; \frac{7}{3}\right)$. **3.137.** Прямая пересекает сферу в двух точках $A(4; 0; 3)$ и $B\left(\frac{1}{7}; 2\frac{4}{7}; 4\frac{2}{7}\right)$. **3.138.** Прямая касается сферы в точке (1; 5; 12). **3.139.** Прямая и сфера не имеют общих точек. **3.140.** 8. **3.141.** Такая точка единственная: (0; 0; −6,5). **3.142.** $4x+3y+12z-25=0$. **3.143.** Такая сфера единственная: $x^2+y^2+z^2=30$. **3.144.** $x=y=z$, $x=y=-z$, $x=-y=z$, $x=-y=-z$. **3.145.** а) $\left(\frac{19}{\sqrt{498}}; \frac{11}{\sqrt{498}}; \frac{4}{\sqrt{498}}\right)$; б) $\left(-\frac{19}{\sqrt{498}}; -\frac{11}{\sqrt{498}}; -\frac{4}{\sqrt{498}}\right)$. **3.146.** $\frac{6}{\pi}$. **3.147.** π. **3.148.** На 13. **3.149.** [7; 13]. **3.150.** 7 дм. **3.151.** 6 см. **3.152.** $2\sqrt{13}$. **3.153.** 13. **3.154.** π. **3.155.** $\sqrt{b^2+\frac{a^2}{4\sin^2\alpha}}$. **3.156.** 6,5. **3.157.** 2,5. **3.158.** $2\frac{2}{3}$. **3.159.** $3\frac{1}{3}$. **3.160.** 1600π дм^2. **3.162.** 12 см. **3.163.** $\sqrt{115}$ или 8. **3.164.** Расстояние от D равно 0; расстояние от C равно $5\sqrt{3}-6$; длина линии пересечения $1{,}5\pi\cdot\sqrt{2}$. **3.165.** 12 см. **3.166.** 8. **3.167.** 24π дм. **3.168.** 72π см^2. **3.169.** 4. **3.170.** 5. **3.171.** 4 или 20. **3.172.** При $r<4$ сфера не имеет с плоскостями общих точек; при $r=4$ сфера касается плоскости α и не имеет общих точек с плоскостью β; при $4<r<6$ сфера пересекает плоскость α по окружности радиуса $\sqrt{r^2-16}$ и не имеет общих точек с плоскостью β; при $r=6$ сфера пересекает плоскость α по окружности радиуса $\sqrt{r^2-16}$ и касается плоскости β; при $r>6$ сфера пересекает плоскость α по окружности радиуса $\sqrt{r^2-16}$, а плоскость β — по окружности радиуса $\sqrt{r^2-36}$. **3.173.** 5. **3.174.** 6 и $6\sqrt{3}$. **3.175.** 7 или 1. **3.176.** 12,5.

3.177. $R\sqrt{3}$. **3.178.** 20. **3.179.** 5. **3.180.** $\sqrt{9-4\sin^2\alpha}:3$. **3.181.** а) $r\cdot\sqrt{2}$; б) $2r\cdot\sqrt{2}$. **3.182.** $2r$. **3.183.** $2\sqrt{2}$. **3.184.** $2\arcsin\frac{1}{3}$. **3.185.** $\pi-2\arcsin\frac{3}{4}$. **3.186.** $r\cdot(3-2\sqrt{2})$. **3.187.** $\sqrt{3}$. **3.188.** 10π. **3.189.** $\frac{R\sqrt{7}}{2}$. **3.190.** $2\cdot\sqrt{6}$. **3.191.** Ребро касается сферы. **3.192.** $2\cdot\sqrt{7}$. **3.193.** Да. **3.195.** 6 см. **3.196.** 17 см. **3.197.** 5 см. **3.198.** $\sqrt{r_1^2+r_2^2}$. **3.199.** $\frac{\pi R^2}{4}$. **3.200.** $\frac{m\sqrt{3}}{2}$. **3.201.** $\pi R^2\sin^2\varphi$. **3.204.** Да. **3.206.** $r\sqrt{3}$. **3.207.** $r(2-\sqrt{3})$ или $r(2+\sqrt{3})$. **3.208.** Куб с ребром 8; $8\sqrt{3}$. **3.209.** $12\sqrt{3}$; $12\pi\sqrt{11}$. **3.210.** $\sqrt{\frac{r_1^2+r_2^2+r_3^2}{2}}$. **3.211.** $3\sqrt{3}$; $3\sqrt{3}$ и $3\sqrt{2}$. **3.212.** 3π. **3.213.** 12π. **3.214.** 3π. **3.215.** 96π. **3.216.** $0{,}5a$; $0{,}5a\sqrt{2}$; $0{,}5a\sqrt{3}$. **3.217.** $\frac{R(3\sqrt{2}-2\sqrt{3}-\sqrt{6}+2)}{4}$. **3.218.** $\frac{4}{3}R$. **3.219.** $1{,}5\pi a$. **3.220.** а) $R\sqrt{3}$; б) $R\sqrt{3}$. **3.221.** m. **3.222.** 1. **3.223.** π. **3.224.** 2π. **3.225.** $\frac{b\sqrt{3}}{6}$. **3.226.** а) $\frac{a\sqrt{3}}{12}$; б) $\frac{a\sqrt{42}}{12}$. **3.227.** а) $\frac{4\pi(2\sqrt{3}+3)}{3}$. **3.228.** а) $r=\frac{a\sqrt{2}}{4}$; б) расстояние до вершины $\frac{a\sqrt{6}}{4}$; расстояние до грани $\frac{a\sqrt{6}}{12}$; расстояние до ребра $\frac{a\sqrt{2}}{4}$. **3.229.** $\frac{9h}{16}$. **3.230.** а) $\frac{a\sqrt{6}}{4}$; б) $\frac{a(\sqrt{11}-\sqrt{6})}{4}$. **3.231.** а) $\sqrt{3}$; б) не имеют общих точек. **3.232.** 25. **3.233.** $12\cdot\sqrt{\frac{2}{17}}$. **3.235.** $0{,}5a$; $0{,}5a$; $0{,}5a\sqrt{2}$; $0{,}5a\sqrt{3}$. **3.236.** $\frac{2-\sqrt{3}}{2}a$. **3.237.** $\frac{2-\sqrt{3}}{2}a$; $\frac{2+\sqrt{3}}{2}a$. **3.238.** $(1{,}5-\sqrt{2})a$. **3.239.** $\frac{\sqrt{3}(\sqrt{3}-1)}{4}a$. **3.240.** $0{,}25a$. **3.241.** $\frac{\sqrt{2}(\sqrt{2}-1)}{2}a$. **3.242.** $\frac{2a\sqrt{3}}{5+5\sqrt{3}}$; $\frac{3a\sqrt{3}}{5+5\sqrt{3}}$. **3.243.** $\frac{3R-R\sqrt{3}}{6}$; $\frac{3R+R\sqrt{3}}{6}$. **3.244.** $\frac{(6\sqrt{3}-9)a^2}{4}$. **3.245.** $0{,}5a\sqrt{3}$; $0{,}5a$; $0{,}5a\sqrt{2}$; $0{,}5a\sqrt{3}$. **3.246.** $0{,}5a(\sqrt{3}-1)$ и $0{,}5a(\sqrt{3}+1)$. **3.247.** Не имеют общих точек. **3.248.** $\sqrt{6}$. **3.249.** 8. **3.253.** $\frac{d\sqrt{21}}{6}$. **3.254.** $\sqrt{\frac{3}{7}}$. **3.255.** 1. **3.256.** $0{,}5\sqrt{194}$. **3.257.** Нет. **3.258.** $\sqrt{\frac{a^4+24a^2h^2+16h^4}{8h}}$. **3.259.** $\frac{2h^2+a^2}{4h}$. **3.260.** а) r; б) r; в) $r\sqrt{2}$; г) $2r$; д) $2r$; е) $2r\sqrt{3}$; ж) $2r$;

з) $r\sqrt{5}$; и) 0; к) $r\sqrt{5}$. **3.261.** $\sqrt{R^2-\frac{b^2}{4}}$. **3.262.** 5. **3.263.** $36r^2\cdot\sqrt{3}$. **3.264.** $\sqrt{3}$. **3.265.** 3 см. **3.266.** 13 м. **3.267.** $\sqrt{2+\operatorname{tg}^2\frac{\pi}{100}}$. **3.268.** а) r; б) $2r$. **3.269.** 30°. **3.270.** 22. **3.271.** 120° и 85° (соответственно). **3.272.** а) 8; б) $4\sqrt{2}$; в) $96+64\sqrt{2}$. **3.273.** $3r\cdot P$. **3.274.** $\sqrt{2}-1$. **3.275.** а) $\frac{a\sqrt{21}}{6}$; б) $\frac{a\sqrt{3}}{3}$; в) нет; г) $\frac{a\sqrt{3}}{6}$; д) $\frac{a\sqrt{3}}{4}$; е) $\frac{a\sqrt{6}}{6}$; ж) $(\sqrt{2}-1):1$; з) $\frac{a\sqrt{5}}{2}$. **3.276.** в) Нет; г) $\frac{a\sqrt{3}}{2}$. **3.277.** У первой призмы длина бокового ребра $4\sqrt{5}$, ребра основания $0{,}5\sqrt{10}$; у второй — соответственно $2\sqrt{5}$ и $\sqrt{10}$. **3.278.** а) $2\sqrt{R^2-\frac{a^2}{3}}$; б) $2\sqrt{R^2-\frac{a^2}{2}}$; в) $2\sqrt{R^2-a^2}$. **3.279.** а) $8R^2$; б) $\frac{21\sqrt{3}}{4}R^2$; в) $\frac{8\sqrt{3}}{4}R^2$. **3.280.** а) $24R^2$; б) $12\sqrt{3}R^2$; в) $24\sqrt{3}R^2$; **3.281.** 672 см^3; 504 см^2. **3.282.** $R^3\sqrt{2}$. **3.283.** $3r$ — до вершин; $r\sqrt{3}$ — до ребер. **3.284.** 3 : 1. **3.285.** 1 : 3. **3.286.** а) $r=\frac{a\sqrt{6}}{12}$; б) расстояние до вершины $\frac{a\sqrt{6}}{4}$; расстояние до грани $\frac{a\sqrt{6}}{12}$; расстояние до ребра $\frac{a\sqrt{2}}{4}$. **3.287.** а) R; $\frac{R}{3}$; $\frac{R}{\sqrt{3}}$; б) $\frac{2R\sqrt{6}}{3}$. **3.288.** $0{,}5h$. **3.289.** $[0{,}5h;\ 0{,}75h]$. **3.290.** $\frac{2r\sqrt{2}}{3}$. **3.291.** $\frac{2r\sqrt{2}}{3}$. **3.292.** $0{,}5r$. **3.293.** $\frac{3h^2+a^2}{6h}$ (опис.); $\frac{ah}{a+\sqrt{12h^2+a^2}}$ (впис.). **3.294.** 60°. **3.295.** $\frac{7}{9}$. **3.296.** 60° или 30°. **3.297.** $\frac{1}{3}$. **3.298.** а) $4\sqrt{3}$; б) $\frac{4}{35}\sqrt{3999}$; в) $\frac{72}{35}$; г) $12\frac{73}{105}$. **3.299.** $4\sqrt{5}$ или $2\sqrt{5}$. **3.300.** $10\sqrt{313}+24\sqrt{194}+240$. **3.301.** $\frac{\sqrt{21}}{3}$. **3.302.** $\arcsin\frac{4\sqrt{34}}{25}$. **3.303.** $\operatorname{arctg}2$. **3.304.** $\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{55}}{11}$. **3.305.** $r\sqrt{3}$, $r\sqrt{5+2\sqrt{3}}$ — до вершин; $r\sqrt{1{,}5}$, $r\sqrt{3+\sqrt{3}}$ — до ребер. **3.306.** $\frac{2}{3}R$. **3.307.** $\frac{12}{7}$. **3.308.** $\operatorname{arctg}\sqrt{1+\sqrt{2}}$. **3.309.** $\operatorname{arctg}\frac{4\sqrt{3}+2\sqrt{7}}{5\sqrt{3}}$. **3.310.** $1+\sqrt{6}$. **3.311.** $\frac{a(\sqrt{3}+1)}{2}$; $\frac{a(\sqrt{3}-1)}{2}$. **3.312.** $\frac{4}{9}$. **3.313.** $\arccos\frac{1}{4\cdot10^8}$. **3.314.** $\arccos\frac{1}{20\,000}$. **3.315.** $\operatorname{arctg}\frac{6666\sqrt{3}}{3333^2\cdot3-1}$.

3.316. $\frac{2a\sqrt{a^2+h^2}-a^2}{2h}$; $\frac{2a\sqrt{a^2+h^2}+a^2}{2h}$. **3.317.** 12. **3.318.** $\frac{r}{\sin 2\varphi}$. **3.319.** $r\cdot\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}$. **3.320.** а) R; б) $R\sqrt{2}$. **3.321.** $0{,}3h$. **3.322.** $\frac{r^2+h^2}{2h}$. **3.323.** $\frac{r(\sqrt{r^2+h^2}-r)}{h}$. **3.324.** 5. **3.325.** 10. **3.326.** а) a^2; б) $\frac{a\sqrt{5}}{2}\operatorname{ctg}\alpha$; в) $\frac{a\sqrt{5}}{2\sin 2\alpha}$. **3.327.** $\frac{169}{24}$. **3.328.** $0{,}5\,c$. **3.329.** $2\sqrt{3}$. **3.330.** 1,5. **3.331.** 13. **3.332.** 11. **3.334.** Не поместится. **3.335.** $2r$ и r. **3.336.** πh. **3.337.** 4. **3.338.** $\sqrt{2s}$; $\sqrt{0{,}5s}$; $\sqrt{0{,}5s}$. **3.339.** 2,5. **3.340.** $r\sqrt{2}$. **3.341.** $\sqrt{5}$. **3.342.** 6,5 или $\sqrt{34}$. **3.343.** 8. **3.344.** $\frac{h\cdot\sqrt{14}}{8}$. **3.345.** 7. **3.346.** 6 и 6. **3.347.** 9 и 6. **3.348.** 0,5 и 1 или 4,5 и 9. **3.349.** 2 и $6-2\sqrt{3}$. **3.350.** 3; весь цилиндр находится внутри шара. **3.351.** Радиус основания цилиндра $2\sqrt{3}$, высота 16; нет, часть цилиндра находится вне шара. **3.352.** 10 или 13,2. **3.353.** 5 или 6,2. **3.354.** $r=2$; $h=2+\sqrt{2}$. **3.355.** 24. **3.356.** $r\cdot\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$. **3.357.** $\sqrt{3}$. **3.358.** $m\cdot\sin\frac{\alpha}{2}$. **3.359.** $\frac{h\cdot\sin\frac{\alpha}{2}}{1+\sin\frac{\alpha}{2}}$. **3.360.** 8π. **3.361.** 13. **3.362.** 60°. **3.363.** $\frac{r}{\sin\alpha}$. **3.364.** $3\sqrt{2}$. **3.366.** 5. **3.367.** 6,9. **3.368.** 2 : 1. **3.369.** 2 : 1. **3.370.** $\sqrt{10}$ или $3\sqrt{10}$. **3.371.** $\frac{c\cdot\sqrt{6}}{6}$. **3.372.** $0{,}75R$. **3.374.** а) $R\sin\varphi$; б) $\frac{r}{\sin\varphi}$; в) 30° или 150°. **3.375.** $\frac{R}{\sqrt{2}+\operatorname{ctg}\frac{\varphi}{2}}$. **3.376.** 3 или 13. **3.377.** [4; 10]. **3.378.** $(0;\,6)\cup(18;\,+\infty)$. **3.379.** $\pi\cdot\sqrt{3}$. **3.380.** При $0<r<5$ и $r>11$ сферы не имеют общих точек; при $r=5$ и $r=11$ сферы касаются друг друга соответственно внешним и внутренним образом; при $5<r<11$ сферы пересекаются по окружности. **3.381.** При $0<r<5$ и $r>11$ сферы не имеют общих точек; при $r=5$ и $r=11$ сферы касаются друг друга внутренним образом; при $0<r<5$ и $r>11$ сферы пересекаются по окружности. **3.382.** [4; 16]. **3.383.** [1; 7]. **3.384.** Окружность радиуса 4,8 (лежащая на сфере). **3.385.** $\frac{\sqrt{3}}{2}$. **3.386.** 8π. **3.389.** 16. **3.390.** $0{,}2a$ и $0{,}3a$. **3.391.** $2+\sqrt{2}$. **3.392.** $3(2-\sqrt{2})$ и $4(2-\sqrt{2})$. **3.393.** $2(1+\sqrt{3})$. **3.394.** $3(3-\sqrt{3})$ и $5(3-\sqrt{3})$. **3.395.** $\frac{d}{2+\sqrt{3}+\sqrt{1{,}5}}$. **3.396.** а) 1 : 3; б) 1 : 2; в) 1 : 4. **3.397.** $6\sqrt{3}$. **3.398.** Таких сфер две; их радиусы $4\sqrt{3}-6$ и $4\sqrt{3}+6$. **3.399.** $0{,}5r\sqrt{2}$. **3.400.** а) 3;

б) $2\sqrt{6}$. **3.401.** Таких сфер две; их радиусы $4\sqrt{6}-9$ и $4\sqrt{6}+9$. **3.402.** а) $R_A=4$; $R_B=5$; $R_C=3$; б) $AD=14$; $BD=15$; $CD=13$. **3.403.** $AD=16$; $BD=15$; $CD=17$. **3.404.** Площадь поверхности шара больше в $\frac{2\pi}{3}$ раза. **3.405.** 4 л. **3.406.** 1 : 8. **3.407.** 1 : 1. **3.408.** 10 см. **3.409.** $66\frac{2}{3}\%$. **3.410.** $3\pi a^2$. **3.411.** 13 см, 11 см. **3.412.** $\frac{8}{3}R^3$; $2:\pi$. **3.413.** $\frac{19}{9}\pi a^2$. **3.414.** 2116π см^2. **3.415.** 972π см^3; 9072 см^3. **3.416.** 256π см^2. **3.417.** $\frac{\pi a^2\cos\alpha}{2\cos^2\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right)}$. **3.419.** $\frac{4\pi}{3\sin^3 2\alpha}$ см^3. **3.420.** 36π см^3. **3.421.** $\frac{a^3\operatorname{tg}\varphi}{8}$. **3.422.** 256π см^2. **3.423.** 36π см^3; 36π см^2. **3.424.** 36π см^3; 36π см^2. **3.425.** 529π см^2. **3.426.** $\frac{4}{81}\pi R^3$; $\frac{4}{9}\pi R^2$. **3.427.** $\frac{V\operatorname{ctg}^3\frac{\alpha}{2}\left(1+\sin\frac{\varphi}{2}\right)^2\operatorname{tg}\alpha}{2\pi\sin\varphi}$. **3.428.** $\frac{\pi}{6}a^3\sin^3\alpha\operatorname{tg}^3\frac{\beta}{2}$. *Указание. Рассмотрите сечение пирамиды, проведенное через высоту пирамиды перпендикулярно стороне ее основания.* **3.429.** 720π см^2. **3.430.** 2 : 3. **3.432.** 972π см^3. **3.433.** $\frac{\pi l^3}{6\cos^3\frac{\alpha}{2}}$. **3.434.** 3528π см^3. *Указание. Названная часть состоит из цилиндра и двух равных шаровых сегментов.* **3.435.** 45π см^2. **3.436.** а) 18π дм^2; б) 432π дм^2. **3.437.** $\frac{\pi}{H^2}(H^2+r^2)^2$; $\frac{\pi}{6H^3}(H^2+r^2)^3$. **3.438.** 4 : 3. **3.439.** $\frac{5}{12}\pi R^3$. **3.441.** $\pi a^2\left(1+\frac{1}{2\cos^2\alpha}\right)$. **3.442.** $\frac{2\pi a r^2}{a+r}$. **3.443.** 10π дм^3. **3.445.** а) $\frac{\pi Q}{6}$; б) $2\pi a^2$; в) $\frac{4Q}{9}$. **3.447.** $\frac{500\pi}{3\sin^3 2\beta}$ см^3. **3.448.** 144π см^2. *Указание. Внутри конуса находится шаровой сегмент с высотой 7,2 см.* **3.449.** $\frac{R(2\sqrt{6}-3)}{3}$; $\frac{R(2\sqrt{6}+3)}{3}$. *Указание. Центры шаров служат вершинами правильного тетдаэдра.* **3.450.** $\frac{\pi h^2}{2\cos^2\frac{\alpha}{2}\sin^2\left(45^\circ+\frac{\alpha}{2}\right)}$. *Указание. Рассмотрите сечения шара и призмы плоскостью, проходящей через центр шара и призмы плоскостью, проходящей через центр шара перпендикулярно боковому ребру.* **3.451.** $R\operatorname{tg}\varphi\left(\sqrt{2}+\operatorname{ctg}\frac{\varphi}{2}\right)$. **3.452.** $\frac{4Q\operatorname{tg}^2\varphi}{\pi(2+\operatorname{tg}^2\varphi)^2}$.

3.453. $30°$. **3.454.** $\frac{3\pi a^3\sqrt{3}}{64}$. **3.455.** $\frac{2\pi r^3}{3}\left(\frac{4-\sin^2\alpha}{\sin^2\alpha}\right)$. **3.456.** 3.
3.458. 7 : 41. **3.459.** 384 см^2. **3.460.** $a^3\sin\frac{\alpha}{2}\sqrt{2\cos\alpha+1}$.
3.461. $\frac{1}{2\cos\left(45°-\frac{\alpha}{4}\right)}\sqrt[6]{\frac{Q^3\sin\alpha\cos\frac{\alpha}{2}}{4\pi^3}}$. **3.462.** $\frac{8Q}{3}\sqrt{\frac{Q}{\pi}}\operatorname{tg}\varphi\sin^6\frac{\varphi}{2}$.
3.464. $0{,}4(\sqrt{17}-2\sqrt{3})$. **3.465.** $0{,}5a\cdot\sqrt{2}$ или $0{,}5a\cdot\sqrt{6}$.
3.466. $0{,}5a\cdot\sqrt{5-2\sqrt{3}}$ или $0{,}5a\cdot\sqrt{5+2\sqrt{3}}$. **3.467.** $\frac{2\pi rh}{\sqrt{r^2+h^2}}$.
3.468. $3{,}84\pi$. **3.469.** 2,4 и 2,5. **3.470.** $0{,}75R$. **3.471.** $\frac{6(6-\sqrt{3})}{11}$.
3.472. 10 или 12,4. **3.473.** 5 или 6,2. **3.474.** $r=2$; $h=2+\sqrt{2}$.
3.475. $3(\sqrt{5}-1)$; $2(4-\sqrt{7})$. **3.476.** $\frac{1}{1+\sqrt{6}}$. **3.477.** $\frac{1}{2}\arccos 0{,}6$.
3.478. 252π см^3; 720π см^3. **3.479.** а) $\frac{\sqrt{2}}{2}$; б) $\frac{\sqrt{2}}{2}$. Вписать можно.

Д

Может быть или не может быть?

1. Может или не может треугольная пирамида быть такой, у которой площади двух соседних граней равны между собой, а их периметры относятся как $1:4$? Если не может быть, то почему? Если может быть, то склейте какую-нибудь такую пирамиду.

2. Может или не может треугольная пирамида быть такой, у которой площади двух соседних граней равны между собой, а длины высот пирамиды, проведенные к этим граням, относятся как $3:4$? Если не может быть, то почему? Если может быть, то склейте какую-нибудь такую пирамиду.

3. Может или не может треугольная пирамида быть такой, у которой площади двух соседних граней соответственно равны 8 см^2 и 9 см^2, а длины высот пирамиды, проведенные к этим граням, равны соответственно 8 см и 9 см? Если не может быть, то почему? Если может быть, то склейте какую-нибудь такую пирамиду.

4. Может или не может треугольная пирамида быть такой, у которой площади двух соседних граней соответственно равны 8 см^2 и 9 см^2, а длины высот пирамиды, проведенные к этим граням, относятся соответственно как $9:8$? Если не может быть, то почему? Если может быть, то склейте какую-нибудь такую пирамиду.

5. Может или не может треугольная пирамида быть такой, у которой все четыре грани равны, а длины ребер одной из этих граней составляют геометрическую прогрессию со знаменателем 1,2? Если не может быть, то почему? Если может быть, то склейте какую-нибудь такую пирамиду.

6. Может или не может треугольная пирамида быть такой, у которой все четыре грани равны, а длины ребер одной из этих граней составляют геометрическую прогрессию со знаменателем 1,5? Если не может быть, то почему? Если может быть, то склейте какую-нибудь такую пирамиду.

7. Может или не может треугольная пирамида быть такой, у которой все четыре грани равны, а длины ребер одной из этих граней составляют арифметическую прогрессию с разностью

2? Если не может быть, то почему? Если может быть, то склейте какую-нибудь такую пирамиду.

8. Может или не может треугольная пирамида быть такой, у которой все четыре грани равны, а квадрат длины стороны одной из этих граней равен разности квадратов длин двух других сторон этой же грани? Если не может быть, то почему? Если может быть, то склейте какую-ннбудь такую пирамиду.

9. Может или не может треугольная пирамида быть такой, у которой две соседние грани — равносторонние треугольники со стороной 8 см, а длина ребра, не лежащего в этих гранях, равна 14 см? Если не может быть, то почему? Если может быть, то склейте какую-нибудь такую пирамиду.

10. Может или не может треугольная пирамида быть такой, у которой две соседние грани — равносторонние треугольники со стороной 8 см, а длина ребра, не лежащего в этих гранях, равна 12 см? Если не может быть, то почему? Если может быть, то склейте какую-пибудь такую пирамиду.

11. Может или не может треугольная пирамида быть такой, у которой две соседние грани — равносторонние треугольники со стороной 8 см, а длина высоты, проведенной к одной из этих граней, равна 6 см? Если не может быть, то почему? Если может быть, то склейте какую-нибудь такую пирамиду.

12. Может или не может треугольная пирамида быть такой, у которой две соседние грани — равносторонние треугольники со стороной 8 см, а длина высоты, проведенной к одной из этих граней, равна 7 см? Если не может быть, то почему? Если может быть, то склейте какую-пибудь такую пирамиду.

13. Может или не может треугольная пирамида быть такой, что центр шара, описанного около этой пирамиды, лежит на одном из ее ребер? Если не может быть, то почему? Если может быть, то склейте какую-нибудь такую пирамиду.

14. Может или не может треугольная пирамида быть такой, у которой пикакие две грани не равны между собой, а центр шара, описанного около этой пирамиды, лежит на одном из ее ребер? Если не может быть, то почему? Если может быть, то склейте какую-нибудь такую пирамиду.

15. Может или не может треугольная пирамида быть такой, у которой площадь одной грани в три раза меньше площади

каждой из трех других граней? Если не может быть, то почему? Если может быть, то склейте какую-нибудь такую пирамиду.

16. **Может или не может треугольная пирамида быть такой, у которой площадь одной грани в три раза больше площади каждой из трех других граней? Если не может быть, то почему? Если может быть, то склейте какую-нибудь такую пирамиду.**

17. **Может или не может треугольная пирамида быть такой, у которой сумма длин всех ребер основания равна сумме длин всех боковых ребер? Если не может быть, то почему? Если может быть, то склейте какую-нибудь такую пирамиду.**

18. **Может или не может треугольная пирамида быть такой, у которой площадь основания равна сумме площадей всех боковых граней? Если не может быть, то почему? Если может быть, то склейте какую-нибудь такую пирамиду.**

19. **Может или не может треугольная пирамида быть такой, у которой площадь основания равна сумме площадей двух боковых граней? Если не может быть, то почему? Если может быть, то склейте какую-нибудь такую пирамиду.**

20. **Может или не может треугольная пирамида быть такой, у которой сумма длин всех ребер равна 60 см? Если не может быть, то почему? Если может быть, то склейте какую-нибудь такую пирамиду.**

21. **Может или не может треугольная пирамида быть такой, у которой сумма площадей всех боковых граней равна 60 см^2? Если не может быть, то почему? Если может быть, то склейте какую-нибудь такую пирамиду.**

22. **Может или не может треугольная пирамида быть такой, у которой сумма длин всех высот равна 60 см? Если не может быть, то почему? Если может быть, то склейте какую-нибудь такую пирамиду.**

23. **Может или не может треугольная пирамида быть такой, у которой все грани — прямоугольные треугольники? Если не может быть, то почему? Если может быть, то склейте какую-нибудь такую пирамиду.**

24. **Может или не может треугольная пирамида быть такой, у которой все грани — равные между собой прямоугольные**

треугольники? Если не может быть, то почему? Если может быть, то склейте какую-нибудь такую пирамиду.

25. Может или не может треугольная пирамида быть такой, у которой все грани — прямоугольные треугольники, среди которых нет двух равных между собой треугольников? Если не может быть, то почему? Если может быть, то склейте какую-нибудь такую пирамиду.

26. Может или не может треугольная пирамида быть такой, одна из вершин которой равноудалена от остальных вершин пирамиды? Если не может быть, то почему? Если может быть, то склейте какую-пибудь такую пирамиду.

27. Может или не может четырехугольная пирамида быть такой, у которой все ребра имеют длину 8 см? Если не может быть, то почему? Если может быть, то склейте какую-нибудь такую пирамиду.

28. Может или не может четырехугольная пирамида быть такой, у которой все грани имеют площадь 8 см^2? Если не может быть, то почему? Если может быть, то склейте какую-нибудь такую пирамиду.

29. Может или не может четырехугольная пирамида быть такой, у которой периметр основания равен сумме длин всех боковых ребер? Если не может быть, то почему? Если может быть, то склейте какую-нибудь такую пирамиду.

30. Может или не может четырехугольная пирамида быть такой, у которой площадь основания равна сумме площадей всех боковых граней? Если не может быть, то почему? Если может быть, то склейте какую-нибудь такую пирамиду.

31. Может или не может четырехугольная пирамида быть такой, что центр шара, описанного около этой пирамиды, лежит на одном из ребер ее основания? Если не может быть, то почему? Если может быть, то склейте какую-нибудь такую пирамиду.

32. Может или не может четырехугольная пирамида быть такой, что центр шара, описанного около этой пирамиды, лежит на одном из ее боковых ребер? Если не может быть, то почему? Если может быть, то склейте какую-пибудь такую пирамиду.

33. Может или не может четырехугольная пирамида быть такой, у которой все боковые грани — неравные между собой прямоугольные треугольники? Если не может быть, то почему? Если может быть, то склейте какую-нибудь такую пирамиду.

34. Может или не может четырехугольная пирамида быть такой, около которой нельзя описать шар? Если не может быть, то почему? Если может быть, то склейте какую-нибудь такую пирамиду.

35. Может или не может четырехугольная пирамида быть такой, в которую нельзя вписать шар? Если не может быть, то почему? Если может быть, то склейте какую-нибудь такую пирамиду.

36. Может или не может неправильная четырехугольная пирамида быть такой, около которой можно описать шар и в которую можно вписать шар? Если не может быть, то почему? Если может быть, то склейте какую-нибудь такую пирамиду.

37. Может или не может четырехугольная пирамида быть такой, около которой можно описать шар радиуса более чем в шесть раз большего любого ребра пирамиды? Если не может быть, то почему? Если может быть, то склейте какую-нибудь такую пирамиду.

38. Может или не может четырехугольная пирамида быть такой, около которой можно онисать шар радиуса более чем в шесть раз меньшего любого ребра пирамиды? Если не может быть, то почему? Если может быть, то склейте какую-нибудь такую пирамиду.

39. Может или не может четырехугольная пирамида быть такой, что одна из вершин этой пирамиды равноудалена от остальных ее вершин? Если не может быть, то почему? Если может быть, то склейте какую-пибудь такую пирамиду.

40. Может или не может четырехугольная пирамида быть такой, каждая вершина которой равноудалена не менее чем от трех других ее вершин? Если не может быть, то почему? Если может быть, то склейте какую-нибудь такую пирамиду.

41. Может или не может четырехугольная призма быть такой, что она не является параллелепипедом, а все четыре ее диагонали равны между собой? Если не может быть, то почему? Если может быть, то склейте какую-нибудь такую призму.

42. Может или не может четырехугольная призма быть такой, три диагонали которой равны между собой, а длина четвертой диагонали равна сумме длин этих трех диагоналей? Если не может быть, то почему? Если может быть, то склейте какую-пибудь такую призму.

43. Может или не может четырехугольная призма быть такой, одна из вершин каждого из оснований которой равноудалена от четырех вершин другого основания? Если не может быть, то почему? Если может быть, то склейте какую-пибудь такую призму.

44. Может или не может четырехугольная призма быть такой, одна из вершин которой равноудалена от остальных семи ее вершин? Если не может быть, то почему? Если может быть, то склейте какую-нибудь такую призму.

45. Может или не может четырехугольная призма быть такой, что центр шара, описанного около этой призмы, лежит на одном из ребер ее основания? Если не может быть, то почему? Если может быть, то склейте какую-нибудь такую призму.

46. Может или не может четырехугольная призма быть такой, что центр шара, описанного около этой призмы, лежит на одном из ее боковых ребер? Если не может быть, то почему? Если может быть, то склейте какую-нибудь такую призму.

47. Может или не может четырехугольная призма быть такой, что центр шара, описанного около этой призмы, лежит ровно на одной из ее боковых граней? Если не может быть, то почему? Если может быть, то склейте какую-нибудь такую призму.

48. Может или не может четырехугольная призма быть такой, что центр шара, описанного около этой призмы, лежит ровно на одном из ее оснований? Если не может быть, то почему? Если может быть, то склейте какую-нибудь такую призму.

49. Может или не может шестиугольная призма быть такой, что периметры всех ее граней равны между собой? Если не может быть, то почему? Если может быть, то склейте какую-нибудь такую призму.

50. Может или не может шестиугольная призма быть такой, что площади всех ее граней равны между собой? Если не может быть, то почему? Если может быть, то склейте какую-пибудь такую призму.

51. Может или не может шестиугольная призма быть такой, площадь боковой поверхности которой в шесть раз больше площади ее основания? Если не может быть, то почему? Если может быть, то склейте какую-нибудь такую призму.

52. Может или не может шестиугольная призма быть такой, площадь боковой поверхности которой в шесть раз меньше площади ее основания? Если не может быть, то почему? Если может быть, то склейте какую-нибудь такую призму.

53. Может или не может призма быть такой, количество диагоналей которой в 4 раза больше количества ее граней? Если не может быть, то почему? Если может быть, то склейте какую-нибудь такую призму.

54. Может или не может призма быть такой, количество диагоналей которой на 12 больше количества ее граней? Если не может быть, то почему? Если может быть, то склейте какую-нибудь такую призму.

55. Могут или не могут четырехугольная призма и четырехугольная пирамида быть такими, чтобы они обладали равными объемами и имели равные площади полных поверхностей? Если не могут быть, то почему? Если могут быть, то склейте какие-нибудь такие призму и пирамиду.

Ответы к «Может быть или не может быть?»

1. Да. 2. Нет. 3. Нет. 4. Да. 5. Да. 6. Нет. 7. Да. 8. Нет. 9. Да. 10. Да. 11. Да. 12. Нет. 13. Да. 14. Да. 15. Да. 16. Нет. 17. Да. 18. Нет. 19. Да. 20. Да. 21. Да. 22. Да. 23. Да. 24. Нет. 25. Да. 26. Да. 27. Да. 28. Да. 29. Да. 30. Нет. 31. Да. 32. Да. 33. Да. 34. Да. 35. Да. 36. Да. 37. Да. 38. Нет. 39. Да. 40. Да. 41. Да. 42. Да. 43. Да. 44. Нет. 45. Нет. 46. Нет. 47. Да. 48. Нет. 49. Да. 50. Да. 51. Да. 52. Да. 53. Да. 54. Нет. 55. Да.

Задачи на нахождение наибольшего и наименьшего значений

1. Найдите площадь полной поверхности правильной шестиугольной призмы объема 4, имеющей наименьшую сумму длин всех ребер.

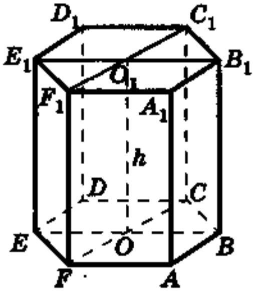


Рис. 30

Решение. Пусть $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ — данная призма (рис. 30), длину стороны основания которой обозначим a, а длину высоты — h. Тогда для объема V и суммы S длин всех ребер призмы имеем:

$$V = 6 \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4} \cdot h = \frac{3\sqrt{3}}{2} \cdot a^2h,$$

$$S = 12a + 6h = 6(2a + h).$$

Из условия $\frac{3\sqrt{3}}{2} \cdot a^2h = 4$ находим $h = \frac{8\sqrt{3}}{9a^2}$, значит, $S = 12\left(a + \frac{4\sqrt{3}}{9a^2}\right)$.

Рассмотрим функцию $S(a) = 12\left(a + \frac{4\sqrt{3}}{9a^2}\right)$. Для определения наименьшего значения этой функции находим ее производную: $S'(a) = 12 \cdot \left(a + \frac{4\sqrt{3}}{9a^2}\right)' = 12 \cdot \left(1 - \frac{8\sqrt{3}}{9a^3}\right) = 12 \cdot \left(\frac{9a^3 - 8\sqrt{3}}{9a^3}\right)$ и решаем уравнение $S'(a) = 0$, т. е. уравнение $12\left(\frac{9a^3 - 8\sqrt{3}}{9a^3}\right) = 0$, которое равносильно уравнению $9a^3 - 8\sqrt{3} = 0$ (при $a \neq 0$). Решением этого уравнения является значение $a = \sqrt[3]{\frac{8\sqrt{3}}{9}}$. Вычисления показывают, что $S'(1) < 0$, $S'(2) > 0$ $\left(1 < \sqrt[3]{\frac{8\sqrt{3}}{9}} < 2\right)$, значит, функция $S(a)$ принимает наименьшее значение при $a = \sqrt[3]{\frac{8\sqrt{3}}{9}}$. При этом значении a находим:

$$S_{осн} = \frac{3\sqrt{3}}{2} \cdot a^2 = \frac{3\sqrt{3}}{2} \cdot \left(\sqrt[3]{\frac{8\sqrt{3}}{9}}\right)^2 = \frac{3\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{4}{3} = 2\sqrt{3};$$

$$h = \frac{8\sqrt{3}}{9a^3} = \frac{8\sqrt{3}}{9 \cdot \frac{4}{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3};$$

$$S_{бок} = 6ah = 6 \cdot \sqrt[3]{\frac{8\sqrt{3}}{9}} \cdot \frac{2\sqrt{3}}{3} = 8.$$

Тогда $S_{полн} = S_{бок} + 2S_{осн} = 8 + 2 \cdot 2\sqrt{3} = 8 + 4\sqrt{3}$.

Ответ: $8 + 4\sqrt{3}$.

2. Основание пирамиды — правильный треугольник. Одно из боковых ребер пирамиды совпадает с ее высотой, а длины двух других боковых ребер равны 3. При какой высоте пирамиды ее объем будет наибольшим? Найдите это наибольшее значение объема.

Ответ: $\sqrt{3}$; 1,5.

3. Прямоугольный треугольник, сумма длин катетов которого равна 3, вращается вокруг одного из них. Какими должны быть длины катетов, чтобы объем полученного при вращении конуса был наибольшим?

Ответ: 2; 1; $\frac{4\pi}{3}$.

4. Середина бокового ребра правильной треугольной пирамиды находится на расстоянии 2 от высоты основания, не пересекающей это боковое ребро. При какой длине стороны основания пирамиды она будет иметь наибольшую площадь боковой поверхности? Найдите это значение площади.

Ответ: $4\sqrt{3}$; $12\sqrt{6}$.

5. Правильная треугольная призма вписана в шар радиуса 4 так, что одно из боковых ребер лежит на диаметре шара, а все вершины противоположной боковой грани принадлежат поверхности шара. При какой высоте призмы сумма длин всех ее ребер будет наибольшей?

Ответ: $2\sqrt{2}$; $24\sqrt{2}$.

6. В правильную четырехугольную пирамиду, диагональное сечение которой является правильным треугольником со стороной 3, вписана правильная четырехугольная призма, боковые ребра которой параллельны диагонали основания пирамиды, одна боковая грань лежит в основании пирамиды, а вершины противоположной грани лежат на боковых гранях пирамиды. При какой высоте призмы ее объем будет наибольшим? Найдите это наибольшее значение объема.

Ответ: 1; $12 \cdot (2 - \sqrt{3})^2$.

7. В куб с ребром 6 вписана правильная шестиугольная призма так, что диагональ куба проходит через центры оснований призмы и на каждой грани куба лежат по две вершины призмы. Найдите высоту призмы, при которой ее объем будет наибольшим. Какую по объему часть куба занимает при этом призма?

Ответ: $\frac{1}{3}$; $2\sqrt{3}$.

8. Одно из оснований правильной треугольной призмы принадлежит большому кругу шара радиуса 26, а вершины другого основания принадлежат поверхности этого шара. Определите высоту призмы, при которой сумма длин всех ее ребер будет наибольшей.

Ответ: $2\sqrt{13}$.

9. В куб с ребром 3 вписан цилиндр, ось которого лежит на диагонали куба, а окружности оснований касаются граией. Найдите высоту цилиндра, при которой он будет иметь наибольший объем. Определите это наибольшее значение объема цилиндра.

Ответ: $\sqrt{3}$; $\frac{\pi \cdot 3\sqrt{3}}{2}$.

10. В правильную треугольную пирамиду вписана правильная треугольная призма, одно основаиие которой лежит в плоскости основания пирамиды, а вершины другого основания принадлежат апофемам пирамиды. Высота призмы равна 2, а сторона ее основаиия $\sqrt{6}$. При какой высоте пирамиды радиус описанной около нее сферы будет наименьшим? Найдите это значение радиуса.

Ответ: 6; 4,5.

11. В сферу вписаиа правильная шестиугольная призма, боковые грани которой — квадраты с длиной стороны 6. Вершины верхнего основаиия правильной четырехугольной призмы принадлежат сфере, а ее нижнее основание лежит в плоскости верхнего основания данной шестиугольной призмы. Какой должна быть высота четырехугольной призмы, чтобы ее объем был наибольшим? Найдите это наибольшее значение объема.

Ответ: 2; 80.

12. В сферу вписан конус, в который, в свою очередь, вписана правильная четырехугольная призма; одно из оснований призмы лежит в плоскости основания конуса, а вершины другого основания — на боковой поверхности конуса. Длина бокового ребра призмы равна 4, а длина стороны основания равна 8. Определите высоту конуса, при которой радиус описанной около него сферы будет наименьшим. Найдите это наименьшее значение радиуса.

Ответ: 12; 9.

13. В правильную треугольную пирамиду вписан шар. Другой шар касается всех боковых граней пирамиды и первого шара. Расстояние между центрами шаров 4. Какими должны быть радиусы шаров, чтобы пирамида имела наименьший объем?

Ответ: $\frac{2\sqrt{6}}{3}$; $\frac{6-\sqrt{6}}{6}$.

14. В правильную четырехугольную пирамиду вписан шар. Второй шар, имеющий радиус 4, касается первого шара и всех боковых граней пирамиды. При каком радиусе первого шара пирамида имеет наименьший объем? Найдите отношение объема пирамиды к объему первого шара в этом случае.

Ответ: 5; $\frac{25}{2\pi}$.

15. В конус вписана правильная четырехугольная призма высоты 6; ее нижнее основание лежит в плоскости основания конуса, а вершины другого основания принадлежат его боковой поверхности. Вершины верхнего основания другой призмы, подобной первой, принадлежат боковой поверхности конуса, а ее нижнее основание лежит в плоскости верхнего основания первой призмы. При какой высоте второй призмы отношение ее объема к объему конуса будет наибольшим? Найдите это значение отношения.

Ответ: 5; $\left(\frac{5}{6}\right)^5\pi$.

16. В конус с высотой 3 и радиусом основания 2 вписана правильная треугольная призма, нижнее основание которой лежит в плоскости основания конуса, а вершины другого основания принадлежат его боковой поверхности. Вершины верхнего основания другой призмы, подобной первой, принадлежат боковой поверхности конуса, а ее нижнее основание лежит в плоскости верхнего основания первой призмы. При какой высоте первой призмы вторая призма имеет наибольший объем? Найдите это наибольшее значение объема.

Ответ: $\frac{1}{2}$; $1{,}5\sqrt{3}\left(\frac{5}{6}\right)^5$.

17. В правильную треугольную пирамиду с высотой 4 вписана правильная треугольная призма со стороной основания 3 так, что ее нижнее основание лежит в плоскости основания пирамиды, а вершины другого ее основания лежат на боковых ребрах пирамиды. Нижнее основание второй призмы, подобной первой, принадлежит верхнему основанию первой призмы, а вершины ее верхнего основания также лежат на боковых ребрах пирамиды. При какой высоте первой призмы вторая призма имеет наибольший объем? Найдите отношение объема пирамиды к объему второй призмы в этом случае.

Ответ: 1; $\left(\frac{4}{3}\right)^6$.

18. В сферу радиуса 2 вписана правильная треугольная призма. Вторая призма, подобная первой, своим нижним основанием поставлена на верхнее основание первой призмы, а вершины ее верхнего основания принадлежат сфере. При какой высоте первой вписанной призмы вторая призма имеет наибольшую высоту?

Ответ: $\sqrt{\frac{2}{\sqrt{3}} - 1}$.

19. В сферу радиуса 9 вписана правильная треугольная пирамида. В пирамиду вписана прямая призма, одно основание которой лежит в плоскости основания пирамиды, а вершины другого лежат на боковых ребрах пирамиды. Какими должны быть высота пирамиды и высота призмы, чтобы объем призмы был наибольшим? Найдите это значение объема. Покажите, что при этом пирамида также должна иметь наибольший объем.

Ответ: 12; 4; $96\sqrt{3}$.

20. В сферу вписана правильная четырехугольная пирамида; в пирамиду вписан цилиндр, одно из оснований которого лежит в плоскости основаиия пирамиды, а окружность другого касается ее боковых граней. Высота цилиндра и радиус его основаиия равны 4. При какой высоте пирамиды радиус описанной около нее сферы будет наименьшим? Найдите это наименьшее значение радиуса.

Ответ: 12; 9.

21. Конус с углом 60° между образующей и высотой вписан в сферу радиуса 2 так, что его вершина находится в центре сферы, а окружность основания — на сфере. Все вершины нижнего основания правильной шестиугольной призмы (параллельного основанию конуса) лежат на сфере, а остальные ее вершины принадлежат боковой поверхности конуса. Какими должны быть высота и сторона основания призмы, чтобы площадь ее боковой поверхности была наибольшей? Найдите это значение площади.

Ответ: $\frac{2\sqrt{3}}{3}$; 1; $4\sqrt{3}$.

22. Одно основание правильной шестиугольной призмы, все ребра которой равны 4, принадлежнт основанию правильной шестиугольной пирамиды, а вершины другого основания лежат на боковых гранях пирамиды. При какой высоте пирамиды объем вписанного в нее шара будет наибольшим? Найднте это значение объема шара. Определите отношение объемов пирамиды и шара.

Ответ: 28; $\frac{16}{\pi\sqrt{3}}$; $\frac{343\pi}{6}$.

23. В шар вписана правильная четырехугольная пирамида. Одна грань куба с ребром 2 лежнт в плоскости основания пирамиды, при этом однн конец диагонали куба совпадает с центром основаиия пирамиды, а другой конец этой диагонали лежнт на боковом ребре пирамиды. При какой высоте пирамиды объем шара будет наименьшим? Найднте это значение объема.

Ответ: $\frac{243\pi}{2}$.

24. В правильной четырехугольной пирамиде с высотой 6 и углом 60° между боковым ребром и высотой расположена

правильная четырехугольная призма. Все вершины ее нижнего основания (параллельного основанию пирамиды) принадлежат сфере с центром в вершине пирамиды и касающейся ее основания; верхнее основание призмы является сечением пирамиды. Какими должны быть сторона основания и высота призмы, чтобы площадь ее боковой поверхности была наибольшей? Найдите это значение площади.

Решение. Пусть $PABCD$ — данная правильная пирамида с основанием $ABCD$ и высотой PO ($O = AC \cap BD$); $MNKLM_1N_1K_1L_1$ — правильная призма, вписанная в данную пирамиду так, что $(MNK)\|(ABC)$, $M_1 \in PA$, $N_1 \in PB$, $K_1 \in PC$, $L_1 \in PD$ и $MK\|AC$, $NL\|BD$. (Желательно сделать наглядный рисунок по условию задачи с указанными обозначениями.)

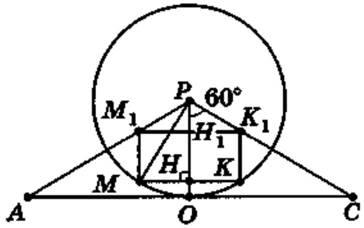


Рис. 31

Так как пирамида $PABCD$ — правильная, то сфера с центром P касается плоскости основания $ABCD$ пирамиды в точке O и радиус сферы равен 6, т. е. $OP = 6$.

Рассмотрим сечение пирамиды и сферы плоскостью PAC. На рисунке 31 изображены:

окружность радиуса 6 — диаметральное сечение сферы;

$\triangle PAC$ — осевое сечение данной пирамиды;

прямоугольник MKK_1M_1 — диагональное сечение иризмы $MNKLM_1N_1K_1L_1$.

Если $HM = a$ ($a > 0$, $H = MK \cap NL$), то в прямоугольном $\triangle MNH$ находим: $MN = a\sqrt{2}$; в прямоугольном $\triangle PHM$ ($PM = 6$): $HP = \sqrt{MP^2 - MH^2} = \sqrt{36 - a^2}$; в прямоугольном $\triangle PH_1K_1$ ($H_1 = M_1K_1 \cap N_1L_1$): $PH_1 = H_1K_1 \cdot \operatorname{tg} 30° = \frac{a\sqrt{3}}{3}$.

Теперь можно найти высоту HH_1 призмы $MNKLM_1N_1K_1L_1$: $HH_1 = PH - PH_1 = \sqrt{36 - a^2} - \frac{a\sqrt{3}}{3}$. Тогда для площади $S_{бок}$ боковой поверхности этой призмы получаем

$$S_{бок} = S_{бок}(a) = 4 \cdot a\sqrt{2} \cdot \left(\sqrt{36 - a^2} - \frac{a\sqrt{3}}{3}\right) =$$

$$= 4\sqrt{2}\left(a\sqrt{36 - a^2} - \frac{a^2\sqrt{3}}{3}\right).$$

Находим производную функции $S_{бок}(a)$.

$$S'_{бок}(a) = 4\sqrt{2}\left(\sqrt{36-a^2} + a\cdot\frac{-2a}{2\sqrt{36-a^2}} - \frac{2a\sqrt{3}}{3}\right) = \\ = \frac{8\sqrt{2}(54-3a^2-a\sqrt{108-3a^2})}{3\sqrt{36-a^2}}.$$

Для нахождения точек экстремумов функции $S_{бок}(a)$ необходимо решить уравнение $S'_{бок}(a) = 0$, т. е. уравнение $\frac{8\sqrt{2}(54-3a^2-a\sqrt{108-3a^2})}{3\sqrt{36-a^2}} = 0$, которое после преобразований приводится к равносильному ему уравнению $a^4 - 36a^2 + 243 = 0$ (при $a \neq 6$).

Пусть $a^2 = t$, $t > 0$. Получаем:

$t^2 - 36t + 243 = 0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} t = 9, \\ t = 27, \end{array}\right.$ тогда $a_1 = 3$, $a_2 = 3\sqrt{3}$ (значения $a = -3$ и $a = -3\sqrt{3}$ не удовлетворяют условию $a > 0$). Убеждаемся, что $S'_{бок}(2) > 0$, $S'_{бок}(4) < 0$, $S'_{бок}(5{,}3) > 0$, значит, $S_{бок}(a)$ принимает наибольшее значение при $a = 3$. Причем при $a = 3$ получаем: $MN = a\sqrt{2} = 3\sqrt{2}$, $HH_1 = \sqrt{36-a^2} - \frac{a\sqrt{3}}{3} = 2\sqrt{3}$, $S_{бок} = 24\sqrt{6}$.

Ответ: $3\sqrt{2}$; $2\sqrt{3}$; $24\sqrt{6}$.

25. В сферу радиуса 5 вписана правильная четырехугольная пирамида, высота которой равна стороне основания. Между боковой гранью пирамиды и сферой расположена правильная треугольная призма, одно из оснований которой (ближнее к центру сферы) лежит в плоскости боковой грани пирамиды, а вершины другого основания принадлежат сфере. Какой должна быть высота призмы, чтобы ее объем был наибольшим? Найдите это значение объема.

Ответ: $6\sqrt{5}$; $\frac{50\sqrt{15}}{9}$.

Конкурсные задачи для поступающих в вузы

Российская экономическая академия им. Г. В. Плеханова

1. Площадь поверхности шара, вписанного в конус, равна площади основания конуса. Найдите синус угла наклона образующей конуса к плоскости основания.

Ответ: 0,8.

2. Площадь боковой поверхности конуса относится к площади его основания как 5 : 3. Найдите отношение радиуса конуса к радиусу вписанного в него шара.

Ответ: 2.

3. Радиус основания цилиндра на 40% меньше радиуса описанного около него шара. На сколько процентов площадь полной поверхности цилиндра меньше площади поверхности шара?

Ответ: на 34%.

4. Радиус шара, описанного около цилиндра, на 25% больше радиуса основания цилиндра. На сколько процентов площадь боковой поверхности цилиндра меньше площади его полной поверхности?

Ответ: на 40%.

5. Из вершины A основания равнобедренного треугольника ABC восставлен перпендикуляр AE к плоскости треугольника. Вычислите расстояние от точки E до боковой стороны BC треугольника, если $AE = 1{,}4$; $AB = 5$; $CE = \frac{\sqrt{949}}{5}$.

Ответ: 5.

6. Точка M удалена от плоскости равнобедренного треугольника ABC на 1 см и на одинаковое расстояние от каждой стороны этого треугольника. Зная, что $AB = BC = 3\sqrt{2}$ и $AC = 2\sqrt{2}$, найдите в градусах угол наклона прямой MC к плоскости треугольника.

Ответ: 30.

7. В правильной четырехугольной пирамиде тангенс угла наклона боковой грани к плоскости основания равен $\sqrt{6}$. Найдите угол между противоположными боковыми ребрами пирамиды. Ответ укажите в градусах.

Ответ: 120°.

8. Сторона основания правильной прямой треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ равна $3\sqrt{3}$. Через ребро B_1C_1 и вершину A проведено сечение. Найдите объем пирамиды BCC_1B_1A, если плоскость сечения образует с плоскостью основания призмы угол, равный 30°.

Ответ: 20,25.

Московский государственный университет экономики, статистики и информатики

9. Правильная треугольная пирамида вписана в шар так, что ее основание проходит через центр шара. Радиус шара равен $2\sqrt{3}$ см. Найдите объем пирамиды.

Ответ: 18 см^3.

10. Из куска металла, имеющего форму треугольной пирамиды, выточите круговой конус максимального объема с той же вершиной. Найдите объем сточенного металла, если стороны пирамиды 13, 14 и 15, а высота равна 24.

Ответ: 270,08.

11. В основании пирамиды лежит квадрат со стороной $a = \sqrt{21}$. Высота пирамиды проходит через середину одного из ребер основания и равна $a\frac{\sqrt{3}}{2}$. Найдите радиус шара, описанного около пирамиды.

Ответ: 3,5.

12. Ребро правильного тетраэдра равно $\sqrt{2}$. Определите радиус шара, поверхность которого касается всех ребер тетраэдра.

Ответ: 0,5.

13. Основание пирамиды — правильный треугольник со стороной 6 см. Одно из боковых ребер перпендикулярно плоскости основания и равно 4 см. Найдите радиус шара, описанного вокруг пирамиды.

Ответ: 4 см.

14. Ромб, у которого меньшая диагональ равна его стороне длиной 1 см, вращается около прямой, проходящей через конец большей диагонали перпендикулярно последней. Вычислите объем полученного тела вращения.

Ответ: 4,71 см^3.

15. Основанием наклонного параллелепипеда служит ромб, сторона которого равна 60 см. Плоскость диагонального сечения, проходящая через большую диагональ основания, перпендикулярна плоскости основания. Площадь этого сечения равна 72 дм^2. Найдите меньшую диагональ основания (в см), если боковое ребро равно 80 см и образует с плоскостью основания угол в 60°.

Ответ: 60 см.

Московский государственный университет инженерной экологии

16. В правильную шестиугольную пирамиду вписана правильная шестиугольная призма так, что одно из ее оснований лежит на основании пирамиды, а вершины противоположного основания призмы лежат на боковых ребрах пирамиды. Найдите отношение объемов пирамиды и призмы, если их высоты относятся как 3 : 2.

Ответ: 4,5.

17. В основании пирамиды лежит прямоугольник, а все боковые ребра наклонены к плоскости основания под одинаковыми углами. В пирамиду вписана прямая четырехугольная призма, одно из оснований которой лежит на основании пирамиды, а вершины, принадлежащие другому основанию, лежат на боковых ребрах пирамиды. Найдите отношение объемов пирамиды и призмы, если отношение их высот равно 6 : 1.

Ответ: 2,88.

Московский банковский институт

18. Через вершину C основания равнобедренного треугольника ABC перпендикулярно его плоскости проведена прямая CE так, что точка E отстоит от стороны AB на расстоянии 13 см. Найдите длину CE, если $AC = 15$ см, $AB = 12{,}5$ см.

Ответ: $CE = 5$ см.

19. Гипотенуза AB прямоугольного треугольника ABC лежит в плоскости π. Вершина прямого угла удалена от этой плоскости на 3 см. Вычислите угол между плоскостью π и плоскостью треугольника, если $AC = 3\sqrt{6}$ см, $BC = 3\sqrt{3}$ см.

Ответ: 45°.

Московский авиационный институт

20. В основании прямого параллелепипеда лежит параллелограмм со сторонами 9 м и 16 м. Острый угол параллелограмма равен 60°. Высота параллелепипеда равна 12 м. Найдите угол между неравными диагоналями боковых граней.

Решение. Пусть $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — прямой параллелепипед, в котором $AB = 16$ м, $AD = 9$ м, $AA_1 = 12$ м, $\angle BAD = 60°$ (рис. 32).

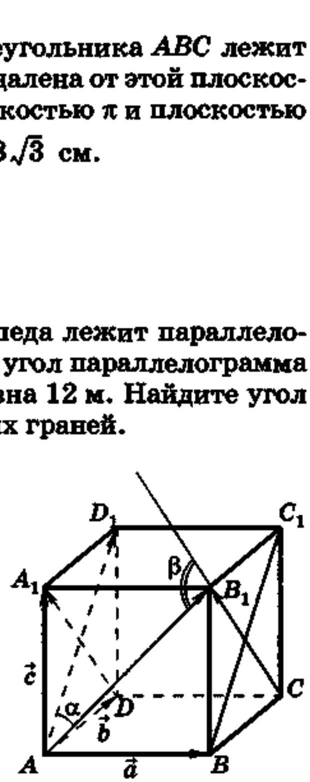


Рис. 32

Так как противоположные боковые грани параллелепипеда — попарно равные прямоугольники, лежащие в параллельных плоскостях, то достаточно найти углы, которые одна из диагоналей любой его боковой грани образует с двумя диагоналями смежной с ней грани. Найдем, например, углы, которые диагональ AB_1 грани ABB_1A_1 образует с диагоналями AD_1 и DA_1 грани ADD_1A_1 (так как $AD_1 \| BC_1$, $A_1D \| B_1C$, то $\angle(AB_1;\ AD_1) = \angle(AB_1;\ BC_1)$, $\angle(AB_1;\ A_1D) = \angle(AB_1;\ B_1C)$).

Решим задачу векторным методом.

Обозначим: $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$, $\overrightarrow{AD} = \vec{b}$, $\overrightarrow{AA_1} = \vec{c}$; $\angle(\overrightarrow{AB_1};\ \overrightarrow{AD_1}) = \alpha$, $\angle(\overrightarrow{AB_1};\ \overrightarrow{DA_1}) = \beta$. Тогда

$$\overrightarrow{AB_1} = \vec{a} + \vec{c},\ \overrightarrow{AD_1} = \vec{b} + \vec{c},\ \overrightarrow{DA_1} = \vec{c} - \vec{b};$$

$$\cos\alpha = \frac{\overrightarrow{AB_1} \cdot \overrightarrow{AD_1}}{\left|\overrightarrow{AB_1}\right| \cdot \left|\overrightarrow{AD_1}\right|} = \frac{(\vec{a} + \vec{c}) \cdot (\vec{b} + \vec{c})}{|\vec{a} + \vec{c}| \cdot |\vec{b} + \vec{c}|},$$

$$\cos\beta = \frac{\overrightarrow{AB_1} \cdot \overrightarrow{DA_1}}{\left|\overrightarrow{AB_1}\right| \cdot \left|\overrightarrow{DA_1}\right|} = \frac{(\vec{a} + \vec{c}) \cdot (\vec{c} - \vec{b})}{|\vec{a} + \vec{c}| \cdot |\vec{c} - \vec{b}|}.$$

Так как параллелепипед прямой, то $\vec{a} \perp \vec{c}$, $\vec{b} \perp \vec{c}$, значит, $\vec{a} \cdot \vec{c} = \vec{b} \cdot \vec{c} = 0$; кроме того, $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos 60^\circ = 16 \cdot 9 \cdot \frac{1}{2} = 72$. Учитывая это, получаем:

$$(\vec{a} + \vec{c}) \cdot (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c} + \vec{b} \cdot \vec{c} + \vec{c}^2 = 72 + 144 = 216;$$

$$(\vec{a} + \vec{c}) \cdot (\vec{c} - \vec{b}) = \vec{a} \cdot \vec{c} - \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{c}^2 - \vec{b} \cdot \vec{c} = 144 - 72 = 72;$$

$$\left|\overrightarrow{AB_1}\right| = \sqrt{\overrightarrow{AB_1}^2} = \sqrt{(\vec{a} + \vec{c})^2} =$$

$$= \sqrt{\vec{a}^2 + 2\vec{a} \cdot \vec{c} + \vec{c}^2} = \sqrt{256 + 144} = 20;$$

$$\left|\overrightarrow{AD_1}\right| = \sqrt{\overrightarrow{AD_1}^2} = \sqrt{(\vec{b} + \vec{c})^2} =$$

$$= \sqrt{\vec{b}^2 + 2\vec{b} \cdot \vec{c} + \vec{c}^2} = \sqrt{81 + 144} = 15;$$

$$\left|\overrightarrow{AD_1}\right| = \left|\overrightarrow{DA_1}\right| = 15.$$

$$\text{Тогда: } \cos\alpha = \frac{216}{20 \cdot 15} = 0{,}72 \Rightarrow \alpha = \arccos 0{,}72;$$

$$\cos\beta = \frac{72}{20 \cdot 15} = 0{,}24 \Rightarrow \beta = \arccos 0{,}24.$$

Так как $\cos\alpha = 0{,}72 > 0$, $\cos\beta = 0{,}24 > 0$, то углы $\angle(\overrightarrow{AB_1}; \overrightarrow{AD_1}) = \alpha$ и $\angle(\overrightarrow{AB_1}; \overrightarrow{DA_1}) = \beta$ между векторами, являющимися направляющими для соответствующих прямых, равны углам между этими прямыми.

$\boxed{!}$ ***Замечание.*** Длины векторов $\overrightarrow{AB_1}$ и $\overrightarrow{AD_1}$ можно проще найти по теореме Пифагора в прямоугольных треугольниках соответственно ABB_1 и ADD_1.

Ответ: $\arccos 0{,}24$; $\arccos 0{,}72$.

21. Стороны основания прямоугольного параллелепипеда равны 9 м и 12 м, а высота — 20 м. Найдите площадь сечения параллелепипеда плоскостью, проходящей через его диагональ и середину бокового ребра.

Ответ: 260 м^2; $6\sqrt{949}$ м^2.

22. Угол между боковым ребром и высотой правильной четырехугольной пирамиды равеп 45°. Найдите угол наклона боковой грани к плоскости основания пирамиды.

Ответ: $\operatorname{arctg}\sqrt{2}$.

23. В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ $AB = 36$ см, $AD = 27$ см, $AA_1 = 36$ см. На ребре B_1C_1 взята точка P, а на ребре C_1D_1 — точка Q так, что $C_1P = 15$ см, $C_1Q = 20$ см. Через точки A, P и Q проведено сечение. Найдите площадь этого сечения.

Ответ: $\dfrac{822\sqrt{2281}}{\sqrt{985}}$ см^2.

24. В основании призмы $ABCDA_1B_1C_1D_1$ лежит прямоугольник $ABCD$ со сторонами $AB = 3$ м и $BC = 4$ м. Отрезок BD_1 перпендикулярен плоскости основания призмы. Боковые ребра наклонены к плоскости основания под углом 60°. Найдите величины двугранных углов между каждой боковой гранью и плоскостью основания этой призмы.

Ответ: $\operatorname{arctg}\dfrac{5\sqrt{3}}{3}$; $\operatorname{arctg}\dfrac{5\sqrt{3}}{4}$.

25. Ребро куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ равно 2 см. На ребре AB взята точка M, а на ребре A_1D_1 — точка N так, что прямая MN касается сферы радиуса 1 см с центром в середине ребра AA_1. Через точку касания и точки A, A_1 проведена плоскость. Какой угол она образует с плоскостью BB_1D_1D?

Ответ: 90°.

26. Найдите количество ребер правильной призмы, если известно, что отношение меньшей диагонали призмы к радиусу вписанной в призму сферы равно $\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}$.

Ответ: 30.

27. В данной правильной четырехугольной пирамиде через сторону основания проведено сечение наименьшего периметра. Это сечение отсекает пирамиду, объем которой равен $\frac{4}{9}$ объема данной пирамиды. Найдите угол между боковым ребром и плоскостью основания пирамиды.

Ответ: $\arccos\sqrt{\frac{9-\sqrt{41}}{12}}$.

28. В правильной треугольной пирамиде $SABC$ боковое ребро SA равно 10 см, а площадь боковой поверхности — 90 см^2. Через вершину A, середину бокового ребра SC и точку на ребре SB проведено сечение наименьшего периметра. В каком отношении секущая плоскость делит объем пирамиды?

Ответ: 4 : 11.

29. В правильной треугольной пирамиде $SABC$ боковые ребра имеют длину 1 м, а угол между ними равен 30°. На боковых ребрах SB и SC взяты соответственно точки M и N (отличные от вершины S) так, что сечение пирамиды плоскостью, проходящей через точки A, M, N, имеет наименьший периметр. Найдите площадь этого сечения.

Ответ: $\frac{\sqrt{3}}{4}(2-\sqrt{3})^2$.

30. Все ребра треугольной пирамиды $SABC$ имеют длину 1 м. Точка M — середина ребра AB, а точка N — середина ребра SC. Найдите наименьший возможный радиус сферы, имеющей общие точки с прямыми SM и AN.

Ответ: $\frac{1}{2\sqrt{10}}$ м.

31. Основанием призмы служит выпуклый n-угольник, имеющий центр симметрии. Боковые ребра наклонены к плоскости основания под углом 60°. Сфера радиуса 1 м касается всех боковых ребер и нижнего основания призмы в точке F. Найдите сумму расстояний от точки F до вершин нижнего основания призмы.

Ответ: $\frac{2n}{\sqrt{3}}$ м.

32. Одна из сторон правильного треугольника образует с плоскостью α угол 30°, а другая — угол 45°. Найдите величину двугранного угла между плоскостью этого треугольника и плоскостью α.

Ответ: $\cos\gamma = \sqrt[4]{\frac{2}{9}}$.

33. В правильную треугольную призму вписан шар радиуса 1 м. Точки M и N лежат на двух не пересекающихся прямых, содержащих диагонали боковых граней этой призмы. Найдите наименьшее возможное расстояние между точками M и N.

Ответ: $2\sqrt{\frac{3}{7}}$ м.

34. В пространстве взяты пять точек S, A, B, C, D. Из четырех треугольников SAB, SBC, SCD, SDA один треугольник — равносторонний, а остальные — неравные прямоугольные треугольники с острым углом 30°. Наименьшая из сторон этих треугольников имеет длину 1 м. Найдите все возможные значения длины замкнутой ломаной $ABCDA$.

Ответ: 9 м; $8 + \sqrt{3}$ м; 10 м; $8 + 2\sqrt{3}$ м.

35. Найдите наибольшее значение объема правильной треугольной пирамиды с апофемой 6 см.

Ответ: 144 см^3.

36. На продолжении ребра BB_1 куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ за точку B_1 взята точка M так, что $MB_1 = 3 \cdot BB_1$. Сколько существует прямых, каждая из которых пересекает четыре прямые: AB, A_1D_1, CC_1, DM?

Ответ: одна прямая.

37. В правильной пирамиде $SABC$ точки K и L — середины сторон AB и AC основания. Через точки K и L проведено сечение, перпендикулярное грани SBC и разбивающее грань SBC на треугольник SMN площадью 4 м^2 и четырехугольник $BCMN$ площадью 5 м^2. Найдите площадь сечения.

Ответ: $\frac{7\sqrt{14}}{4}$ м^2.

38. Ребро куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ равно 1 м. Цилиндр расположен так, что центры его оснований находятся в точках A_1 и B. Известно, что боковая поверхность цилиндра имеет всего одну общую точку с прямой, проходящей через точку D и середину ребра B_1C_1. Найдите объем цилиндра.

Ответ: $\frac{\pi\sqrt{2}}{2}$ м^3.

39. Стороны треугольника равны 10 м, 10 м и 12 м. Сфера радиуса 5 м касается всех сторон треугольника, а сфера радиуса 16,25 м проходит через все вершины треугольника. Найдите наименьшее возможное расстояние между центрами этих сфер.

Ответ: $\frac{\sqrt{1961}}{4}$ м.

40. Правильная треугольная пирамида с боковым ребром 3 см имеет наибольший возможный объем. Найдите радиус шара, описанного около этой пирамиды.

Ответ: $\frac{3\sqrt{3}}{2}$ м.

41. Проекцией правильного тетраэдра на некоторую плоскость служит трапеция с основаниями 1 м и $\sqrt{3}$ м. Найдите объем тетраэдра.

Ответ: $\frac{2\sqrt{2}}{3}$ м^3.

42. Основанием пирамиды служит прямоугольный треугольник с катетами 6 м и 8 м. Объем пирамиды равен 96 м^3. Найдите величину угла наклона каждой боковой грани к плоскости основания пирамиды, если ее боковые ребра имеют равные длины.

Ответ: arctg 4; arctg 3; $\frac{\pi}{2}$.

43. Основанием наклонного параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ служит параллелограмм $ABCD$, площадь которого втрое больше, чем площадь боковой грани DD_1C_1C. Точкой пересечения диагоналей параллелограмма AA_1B_1B является точка M. В каком отношении разделится отрезок CM плоскостью, содержащей прямую AB и образующей равные двугранные углы с плоскостями AA_1B_1B и $ABCD$?

Ответ: $1:6$.

44. В основании четырехугольной пирамиды лежит прямоугольник со сторонами 6 м и 8 м. Вокруг пирамиды описана сфера радиуса 5 м. Объем пирамиды равен 48 м^3. Найдите все возможные значения величин углов наклона боковых граней пирамиды к плоскости основания.

Ответ: $\left[\operatorname{arctg}\frac{3}{8}; \frac{\pi}{2}\right]$.

45. Основанием треугольной пирамиды $ABCD$ служит треугольник со сторонами $AB = AC = 2$ см, $BC = 2\sqrt{2}$ см. Величины двугранных углов при ребрах AD, BD, CD равны соответственно $120°$, $60°$ и $60°$. Найдите площадь треугольника, вершинами которого служат основания перпендикуляров, опущениых из вершин A, B, C на плоскости противоположных боковых граней пирамиды.

Ответ: 0,5 см^2.

46. В шар радиуса 5 м вписан конус с образующей, равной 6 м. Найдите площадь боковой поверхности конуса.

Ответ: $28{,}8\pi$ м^2.

47. Основанием четырехугольной пирамиды $SABCD$ служит трапеция $ABCD$, в которой $AB \parallel CD$. Найдите объем пирамиды, если известно, что площадь грани SAD равна 3 м^2, а точка пересечения медиан треугольника SBC удалена на 1 м от плоскости грани SAD.

Ответ: 3 м^3.

48. В параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ расстояния от вершин A, C, D, D_1 до середины ребра AD равны 3 м. При какой величине двугранного угла, образованного плоскостями AC_1C и ABB_1A_1, объем параллелепипеда будет наибольшим?

Ответ: $\arccos\frac{1}{3}$.

49. На ребре A_1D_1 параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ взята точка E. Найдите отношение объемов пирамид EMC_1B_1 и $ABME$, если M — точка пересечения медиан треугольника ABC.

Ответ: $1:3$.

50. Бак имеет форму куба без верхней грани. Ребро куба равно 1 м. Бак расположен так, что одна из диагоналей нижнего основания параллельна горизонтальной плоскости, а другая диагональ образует с горизонтальной плоскостью острый угол x. Найдите зависимость от x максимально возможного объема $V(x)$ жидкости, содержащейся в баке. (Толщиной стенок и дна бака пренебречь.)

Ответ: $V(x) = 1 - \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \operatorname{tg} x$ при $0 < x \leqslant \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{2}}{2}$;

$$V(x) = 1 + \frac{1}{3}(\sqrt{2} \cdot \operatorname{tg} x - 1)(\sqrt{2} - \operatorname{ctg})^2 -$$

$$- \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \operatorname{tg} x \text{ при } \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{2}}{2} \leqslant x \leqslant \operatorname{arctg} \sqrt{2};$$

$$V(x) = \frac{1}{3}\operatorname{ctg}^2 x \text{ при } \operatorname{arctg} \sqrt{2} \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2}.$$

51. В основании пирамиды $SABCD$ лежит параллелограмм со сторонами $AB = 13$ см, $AD = 14$ см и диагональю $AC = 15$ см. Ребра SA, SB, SC наклонены к плоскости основания под равными углами величиной 45°. Найдите объем пирамиды.

Ответ: 455 см^3.

52. В основании пирамиды $SABCD$ лежит параллелограмм $ABCD$ со сторонами $AB = 4$ см, $AD = 13$ см и диагональю $AC =$ $= 15$ см. Грани SAB, SBC и плоскость диагонального сечения SAC образуют с основанием пирамиды равные углы величиной 45°. Найдите объем пирамиды.

Ответ: 24 см^3.

53. Основанием прямой призмы служит ромб с острым углом 60°. Через сторону нижнего основания и сторону верхнего основания проведена плоскость, образующая с боковым ребром призмы угол 45°. Площадь сечения призмы этой плоскостью равна 1 м^2. Найдите объем призмы.

Ответ: $\sqrt[4]{\frac{2}{3}} \cdot \frac{\sqrt{6}}{4}$ м^3.

54. Основанием пирамиды служит треугольник со сторонами 6 см, 6 см, 10 см. Боковые ребра пирамиды наклонены к плоскости основания под углом 45°. Найдите объем пирамиды.

Ответ: 30 м^3.

55. В основании пирамиды $SABC$ лежит прямоугольный треугольник с гипотенузой AB, равной 2 м. Боковая грань SAB имеет площадь 2 м^2 и наклонена к основанию под углом 60°. Другие боковые грани перпендикулярны плоскости основания. Найдите объем пирамиды.

Ответ: $\frac{1}{\sqrt{3}}$ м^3.

56. Сфера радиуса 1 м касается всех боковых ребер правильной четырехугольной пирамиды, а ее центр принадлежит плоскости основания этой пирамиды. Найдите объем пирамиды, если ее высота равна 3 м.

Ответ: $\frac{9}{4}$ м^3.

57. В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ с ребрами $AB = 6$ м, $BC = 4$ м, $AA_1 = 10$ м через вершину C_1 и середины сторон AB и AD основания проведено сечение. Найдите угол между плоскостью этого сечения и боковым ребром параллелепипеда.

Ответ: $\arccos \frac{9}{\sqrt{406}}$.

58. Найдите объем правильной треугольной пирамиды, боковые грани которой наклонены к плоскости основания под углом 60°, если известно, что сфера радиуса 1 м с центром в плоскости основания касается всех боковых ребер пирамиды.

Ответ: $\frac{7\sqrt{7}}{144}$ м^3.

Московский государственный университет

59. (Мехмат) Сфера касается ребер AS, BS, BC и AC треугольной пирамиды $SABC$ в точках K, L, M и N соответственно. Найдите длину отрезка KL, если $MN = 7$ см, $NK = 5$ см, $LN = 2\sqrt{29}$ см и $KL = LM$.

Ответ: $KL = 9$ см.

60. (Мехмат) Сфера касается ребер AS, CS, AB и BC треугольной пирамиды $SABC$ в точках P, Q, R и T соответственно. Найдите длину отрезка QT, если $PQ = PR = 8$ см, $PT = \sqrt{82}$ см и QT на 7 см больше, чем RT.

Ответ: $QT = 9$ см.

61. (ВМК) В пирамиде $ABCD$ проведено сечение $KMLN$ так, что точка K лежит на ребре AD, точка M — на ребре DC, точка N — на ребре AB, точка L — на ребре BC, O — точка пересечения диагоналей KL и MN четырехугольника $KMLN$. Сечение $KMLN$ делит пирамиду на две части. Найдите отношение объемов этих частей, если известны следующие соотношения между длинами:

$$4 \cdot OL = 3 \cdot OK,\ 25 \cdot ON = 24 \cdot OM,$$
$$DK \cdot NA - KA \cdot BN = KA \cdot NA.$$

Ответ: $\frac{V_1}{V_2} = \frac{213}{67}$.

62. (ВМК) В пирамиде $KNLM$ проведено сечение $ABCD$ так, что точка A лежит на ребре KN, точка B — на ребре NL, точка C — на ребре LM, точка D — на ребре MK. Сечение $ABCD$ делит пирамиду на две части. Найдите отношение объемов этих частей, если известны следующие соотношения между длинами отрезков:

$$3 \cdot BN = 4 \cdot BL,\ 3 \cdot MC = 2 \cdot CL,$$
$$3 \cdot DK \cdot AK - 2 \cdot AN \cdot DM = DM \cdot AK.$$

Ответ: $\frac{V_1}{V_2} = \frac{18}{17}$.

63. (Физфак) Шар радиуса 2 вписан в правильную четырехугольную пирамиду $SABCD$ с вершиной S. Второй шар радиуса 1 касается первого шара, основания пирамиды и боковых граней BSC и CSD. Найдите объем пирамиды и величину двугранного угла при боковом ребре SC.

Ответ: $V = \frac{1024}{9}$, двугранный угол равен $2\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{34}}{3} = \arccos\left(-\frac{9}{25}\right)$.

64. (Физфак) Сторона KL прямоугольника $KLMN$ служит высотой конуса с вершиной L. Радиус основания этого конуса в три раза длиннее отрезка NK. Шар касается плоскости прямоугольника $KLMN$ в точке M и имеет единственную общую точку с конусом. Длина отрезка KL равна 6. Найдите радиус шара.

Ответ: 2.

65. (Химфак) Основанием четырехугольной пирамиды $FABCD$ является квадрат $ABCD$. На ребре AF взята точка E такая, что отрезок CE перпендикулярен ребру AF. Проекция O точки E на основание пирамиды лежит на отрезке AC и делит его в отношении $AO : OC = \gamma$. Найдите разность объемов пирамид $FABCD$ и $FABD$, если известно, что угол $ADF = 90°$, а $AB = a$.

Ответ: $\dfrac{a^3\sqrt{2}(\gamma + 2)}{6\sqrt{\gamma(\gamma + 1)}}$.

66. (Химфак) Основанием треугольной пирамиды $SABCD$ является равнобедренный треугольник ABC с гипотенузой AB. На ребре AS взята точка D такая, что отрезок DB перпендикулярен ребру AS. Проекция O точки D на основание пирамиды лежит на отрезке AB и делит его в отношении $BO : OA = \lambda$. Найдите разность объемов пирамид $SABC$ и $DABC$, если известно, что угол $ADS = 90°$, а $AD = b$.

Ответ: $\dfrac{b}{12}\lambda\sqrt{\lambda(\lambda + 1)}$.

67. (Геологфак) На продолжении ребра ST за точку T правильной четырехугольной пирамиды $SPQRT$ с вершиной S взята точка B так, что расстояние от этой точки до плоскости SPQ равно $9\sqrt{\dfrac{7}{2}}$ см. Найдите длину отрезка BT, если $QR = 12$ см, $SR = 10$ см.

Ответ: $|BT| = 5$ см.

68. (Геологфак) На продолжении ребра SE за точку E правильной четырехугольной пирамиды $SEFGH$ с вершиной S взята точка Q так, что $EQ = 5$ см. Найдите расстояние от точки Q до плоскости SFG, если $GH = 20$ см, $SH = 15$ см.

Ответ: $\dfrac{16\sqrt{5}}{3}$ см.

69. (Мехмат) Отрезок EF параллелен плоскости, в которой лежит прямоугольник $ABCD$, причем $EF = 2$, $AB = 4$. Все стороны прямоугольника $ABCD$ и отрезки AE, BE, CF, DF, EF касаются некоторого шара. Найдите объем шара.

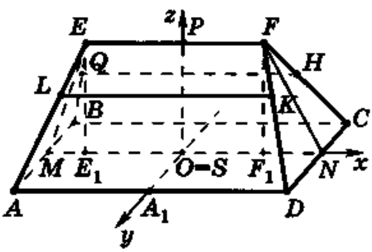


Рис. 33

Решение. Так как все стороны прямоугольника $ABCD$ касаются шара, то сечением шара плоскостью BC является круг, вписанный в этот прямоугольник. Значит, $ABCD$ — квадрат, центр O которого расположен на прямой, проходящей через центр перпендикулярно плоскости этого квадрата (рис. 33).

Если M, N, L, Q, H, K, P — точки касания соответственно отрезков AB, CD, AE, BE, CF, DF, EF с шаром, то:

1. M и N — середины сторон AB и CD квадрата.

2. $AM = AL = BM = BQ = 2$ (как отрезки касательных к шару, проведенных из точек A и B).

3. $EL = EQ = EP$ (как отрезки касательных к шару, проведенных из точки E).

Тогда $AE = AL + LE = BQ + EQ = BE$. Это означает, что $\triangle ABE$ — равнобедренный.

Аналогично доказывается, что $\triangle CDF$ — также равнобедренный. Тогда $EM \perp AB$, $FN \perp CD$ (как медианы этих треугольников). Но так как, кроме того, $MN \perp CD$, то точки M, N, E, F лежат в одной плоскости, проходящей через центр квадрата $ABCD$ перпендикулярно его плоскости. Это означает, что точки E и F проектируются ортогонально в точки E_1 и F_1 отрезка MN. Тогда, в силу параллельностей $MN \| AD$ и $EF \| (ABC)$, приходим к выводу: $MNFE$ и $ADFE$ — трапеции.

Получили: плоскость трапеции $ADFE$ пересекает шар по кругу, вписанному в эту трапецию и касающемуся основания AD этой трапеции в ее середине. Это означает, что трапеция $ADFE$ — равнобедренная, а точка P — точка касания отрезка EF с шаром — является серединой этого отрезка. Следовательно, $MNFE$ — равнобедренная трапеция, причем $EP = PF = 1$.

Имеем: $AL = AM = 2$, $EL = EP = 1$. Значит, $AE = 3$. Тогда:

$$\triangle AME(\angle AME = 90°): ME = \sqrt{AE^2 - AM^2} = \sqrt{5};$$

$$\triangle EME_1(\angle ME_1E = 90°): EE_1 = \sqrt{EM^2 - ME_1^2} = 2.$$

Введем в пространстве декартову прямоугольную систему координат так, чтобы ее начало совпало с центром O квадрата, полуоси Ox и Oy совпадали с лучами ON и OA_1, а полуось Oz—

с лучом OP. В этой системе координат точки M и P приобретают координаты: $M(-2; 0; 0)$, $P(0; 0; 2)$.

Пусть $S(a; b; c)$ — центр шара, R — его радиус.

Ранее доказано, что центр шара принадлежит прямой, проходящей через центр O квадрата $ABCD$ перпендикулярно плоскости этого квадрата. Это означает, что S лежит на оси Oz, поэтому: $a = b = 0$. Координату c вершины S найдем из условия $SM = SP$, которое в координатной форме равносильно уравнению $4 + c^2 = (c - 2)^2$, откуда: $c = 0$.

Таким образом, центр S шара имеет координаты $a = b = c = 0$, значит, точка S совпадает с центром O квадрата $ABCD$. Следовательно, радиус шара равен радиусу круга, вписанного в этот квадрат, т. е. $R = 2$. Тогда объем шара равен:

$$V_ш = \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{32}{3}\pi.$$

Ответ: $\frac{32}{3}\pi$.

70. (Мехмат) Отрезок PQ параллелен плоскости, в которой лежит прямоугольник $KLMN$, причем $KL = 1$, $PQ = 3$. Все стороны прямоугольника $KLMN$ и отрезки KP, LP, NQ, MQ, PQ касаются некоторого шара. Найдите объем шара.

Ответ: $V = \dfrac{36\pi}{11\sqrt{11}}$.

71. (ВМК) В пирамиде $SABC$ основание H высоты SH лежит на медиане CM основания ABC. Точка O, являющаяся серединой высоты SH, находится на одинаковом расстоянии от точки S, точки E, лежащей на ребре SA, и точки F, лежащей на ребре SB. Известно, что $SH = 8$, $AB = 16\sqrt{2}$, $EF = \sqrt{\frac{2}{5}}$, угол SMC не более $30°$; а расстояние между серединами ребер AB и SC равно $4\sqrt{13}$. Найдите радиус сферы, вписанной в пирамиду $SABC$.

Ответ: $r = \frac{8}{7}(2\sqrt{2} - 1)$.

72. (ВМК) В пирамиде $SKLM$ основание H высоты SH лежит на медиане LO основания KLM. Точка E на ребре SK и точка F на ребре SM расположены так, что $LE \perp SK$, $LF \perp SM$. Известно, что $SO = 5\sqrt{21}$, $KM = 15$, $EF = 63\sqrt{37}$, тангенс угла SOL

равен $\sqrt{3}$, а расстояние от точки O до середины ребра SL не превосходит $35\sqrt{\frac{3}{16}}$. Найдите радиус сферы, вписанной в пирамиду $SKLM$.

Ответ: $r = \frac{15}{2}(3 - \sqrt{7})$.

73. (Физфак) В правильной треугольной пирамиде отношение бокового ребра к высоте пирамиды равно 2. Найдите отношение радиуса вписанного в пирамиду шара к стороне основания пирамиды.

Ответ: $\frac{r}{a} = \frac{1}{\sqrt{3}(\sqrt{7} + \sqrt{3})}$.

74. (Физфак) В правильной четырехугольной пирамиде отношение высоты пирамиды к стороне основания равно 2. Найдите отношение радиуса описанного около пирамиды шара к апофеме пирамиды.

Ответ: $\frac{R}{k} = \frac{9}{4\sqrt{17}}$.

75. (Географак) Даны четыре точки A, B, C, D, не лежащие в одной плоскости. Сфера касается прямых AB и AD в точке A и прямых BC и CD в точке C. Найдите площадь сферы, если известно, что $AB = 1$, $BD = 2$, $\angle ABC = \angle BAD = 90°$.

Ответ: 6π.

76. (Географак) Сфера радиуса $\sqrt{5}$ с центром в точке O касается всех сторон треугольника ABC. Точка касания N делит сторону AB пополам. Точка касания M делит сторону AC так, что $AM = \frac{1}{2}MC$. Найдите объем пирамиды $OABC$, если известно, что $AN = NB = 1$.

Ответ: 2.

77. (Мехмат) В основании призмы лежит равносторонний треугольник ABC со стороной $\sqrt{3}$. Боковые ребра AD, BE, CF перпендикулярны основанию. Сфера радиуса $\frac{7}{2}$ касается плоскости ABC и продолжений отрезков AE, BF, CD за точки A, B и C соответственно. Найдите длины боковых ребер призмы.

Ответ: 1.

78. (Мехмат) В основании призмы лежит равносторонний треугольник ABC, боковые ребра призмы AA_1, BB_1, CC_1 перпендикулярны основанию. Сфера, радиус которой равен длине ребра в основании призмы, касается плоскости $A_1B_1C_1$ и продолжений отрезков AB_1, BC_1, CA_1 за точки B_1, C_1, A_1. Найдите длины ребер в основании призмы, если известно, что длины боковых ребер равны 1.

Ответ: $\sqrt{44} - 6$.

79. (ВМК) Сфера радиуса R касается всех граней восьмигранника. Две грани — основания — расположены в плоскостях α и β, а остальные шесть граней — боковые грани — представляют собой или равные между собой трапеции, или равные между собой равнобедренные треугольники. Боковые грани таковы, что каждая боковая сторона треугольника является одновременно боковой стороной трапеции, а каждая боковая сторона трапеции является одновременно либо боковой стороной другой трапеции, либо боковой стороной одного из треугольников. Основания всех трапеций, имеющие длину $\sqrt{13}$, расположены в плоскости β и образуют многоугольник площадью 12, а все другие основания трапеций и все основания треугольников расположены в плоскости α. Площадь поверхности сферы относится к суммарной площади боковых граней, как π относится к 5. Известно, что $3 < R < 4$. Найдите R.

Ответ: $R = 3\sqrt{\dfrac{17 + \sqrt{201}}{22}}$.

80. (ВМК) Сфера радиуса R касается всех граней восьмигранника. Две грани — основания — расположены в плоскостях γ и β, а остальные шесть граней — боковые грани — представляют собой или равные между собой трапеции, или равные между собой равнобедренные треугольники. Боковые грани таковы, что каждая боковая сторона треугольника является одновременно боковой стороной трапеции, а каждая боковая сторона трапеции является одновременно либо боковой стороной другой трапеции, либо боковой стороной одного из треугольников. Основания всех трапеций, имеющие длину $\sqrt{29}$, расположены в плоскости β и образуют многоугольник площадью 20, а все другие основания трапеций и все основания треугольников расположены в плоскости γ. Площадь поверхности сферы относится к суммарной площади боковых граней, как π относится к 6. Известно, что $\frac{3}{2} < R < 2$. Найдите R.

Ответ: $R = 2\sqrt{\frac{31 - 2\sqrt{34}}{33}}$.

81. (Физфак) В конус вписан шар. Площадь поверхности шара равна площади основания конуса. Найдите угол между образующей конуса и плоскостью его основания.

Ответ: $2\operatorname{arctg}\left(\frac{1}{2}\right)$.

82. (Физфак) В основании пирамиды $TABCD$ лежит трапеция $ABCD$ ($DC \| AD$, $AD : BC = 2$). Через вершину T пирамиды проведена плоскость, параллельная прямой BC и пересекающая отрезок AB в точке M такой, что $AM : MB = 2$. Площадь получившегося сечения равна S, а расстояние от ребра BC до плоскости сечения равно d. Найдите: 1) в каком отношении плоскость сечения делит объем пирамиды; 2) объем пирамиды.

Ответ: $\frac{V_1}{V_2} = \frac{7}{20}$, $V = \frac{9}{4}Sd$.

83. (Физфак) В шар вписан конус. Угол между высотой конуса и его образующей равен β. Найдите отношение площади поверхности шара к площади основания конуса.

Ответ: $\frac{4}{\sin^2 2\beta}$.

84. (Физфак) В основании пирамиды $DKLMN$ лежит трапеция $KLMN$ ($LM \| KN$, $RN : LM = 2$). На ребре MN взята точка B так, что $MB : BN = 2$. Через точки D и B проведено сечение пирамиды плоскостью, отстоящей от прямой KN на расстоянии l. Известно, что площадь сечения равна S. Найдите: 1) в каком отношении плоскость сечения делит объем пирамиды; 2) объем пирамиды.

Ответ: 1) $\frac{V_1}{V_2} = \frac{11}{16}$; 2) $V = \frac{9}{5}Sl$.

85. (Мехмат) На диагоналях AB' и BC' граней параллелепипеда $ABCDA'B'C'D'$ взяты точки M и N так, что отрезки MN и $A'C$ параллельны. Найдите отношение длин этих отрезков.

Ответ: $1 : 3$.

86. (Мехмат) На диагонали AC' параллелепипеда $ABCDA'B'C'D'$ взята точка M, а на прямой $B'C$ — точка N так, что отрезки MN и BD параллельны. Найдите отношение длин этих отрезков.

Ответ: $1 : 3$.

87. (Мехмат) Сфера радиуса R делит каждое из ребер SA, SC, AB и CB треугольной пирамиды $SABC$ на три равные части и проходит через середины ребер AC и SB. Найдите длину высоты пирамиды, опущенной из вершины S.

Ответ: $R \cdot \frac{4}{7}\sqrt{14}$.

88. (Мехмат) Точки P, Q, R и S расположены в пространстве так, что середины отрезков SQ и PR лежат на сфере радиуса a, а отрезки PS, PQ, QR и SR делятся сферой на три части в отношении $1 : 2 : 1$ каждый. Найдите расстояние от точки P до прямой QR.

Ответ: $9a\sqrt{3}$.

89. (Физфак) Два шара радиуса r и цилиндр радиуса R ($R > r$) лежат на плоскости. Шары касаются друг друга и боковой поверхности цилиндра. Цилиндр касается плоскости по своей образующей. Найдите радиус шара, меньшего, чем данные, касающегося обоих данных шаров, цилиндра и плоскости.

Ответ: $\left(\frac{2R\sqrt{r} - r\sqrt{3R + r}}{2(R - r)}\right)^2$.

90. (Физфак) На плоскости лежат два шара радиуса r и цилиндр радиуса R ($R > r$). Шары касаются друг друга и боковой поверхности цилиндра. Цилиндр касается плоскости по своей образующей. Найдите радиус шара, большего, чем данные, касающегося обоих данных шаров, цилиндра и плоскости.

Ответ: $\left(\frac{2R\sqrt{r} + r\sqrt{3R + r}}{2(R - r)}\right)^2$.

91. (Мехмат) Высота пирамиды равна 5, а основанием служит треугольник со сторонами 7, 8 и 9. Некоторая сфера касается плоскостей всех боковых граней пирамиды в точках, лежащих на сторонах основания. Найдите радиус сферы.

Ответ: $\sqrt{6}$.

92. (Мехмат) Сфера радиуса $\sqrt{3}$ касается плоскостей всех боковых граней некоторой пирамиды в точках, лежащих на сторонах основания. Найдите высоту пирамиды, если ее основанием служит треугольник со сторонами 5, 6 и 9.

Ответ: 2.

93. (Мехмат) Три параллельные прямые касаются в точках A, B и C сферы радиуса 4 с центром в точке O. Найдите угол BAC, если известно, что площадь треугольника OBC равна 4, а площадь треугольника ABC больше 16.

Ответ: 75°.

94. (Мехмат) Сфера радиуса 4 с центром в точке Q касается трех параллельных прямых в точках F, G и H. Известно, что площадь треугольника QGH равна $4\sqrt{2}$, а площадь треугольника FGH больше 16. Найдите угол GFH.

Ответ: 67,5°.

95. (ВМК) В кубе $ABCDA'B'C'D'$ с параллельными гранями $ABCD$ и $A'B'C'D'$ длина ребер равна 5. Через точки M, N и K, расположенные на ребрах BC, CD и CC' соответственно, проведена плоскость. Известно, что длина биссектрисы угла C в треугольнике NCK равна $\frac{2\sqrt{2}}{3}$, величина угла NMC равна $\arcsin\frac{\sqrt{5}}{5}$, площадь треугольника MCK равна 2 и объем пирамиды $MNKC$ меньше 1. Найдите радиус сферы, касающейся плоскости треугольника MNK и трех граней куба с общей точкой A'.

Ответ: $\frac{36-9\sqrt{6}}{5}$.

96. (ВМК) В кубе $ABCDA'B'C'D'$ с параллельными гранями $ABCD$ и $A'B'C'D'$ длина ребер равна 8. Через точки M, N и K, расположенные на ребрах BC, CD и CC' соответственно, проведена плоскость. Известно, что длина высоты треугольника MCK, опущенной из вершины C, равна $\frac{6}{\sqrt{13}}$, величина угла MNK равна $\arccos\frac{3\sqrt{2}}{5}$, произведение длин отрезков MN и KN

равно $30\sqrt{2}$ и площадь треугольника MNC меньше 7. Найдите радиус сферы, касающейся плоскости треугольника MNK и трех граней куба с общей точкой A'.

Ответ: $\dfrac{109(6-\sqrt{14})}{132}$.

97. (ВМК) В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ с параллельными гранями $ABCD$ и $A_1B_1C_1D_1$ длина ребра равна 1. Точки K и N являются серединами ребер DC и BC соответственио. Точка M лежит на ребре CC_1 и $MC = 0{,}75$. Найдите максимальное значение радиусов сфер, проходящих через точки M, N, K и касающихся плоскости BB_1D_1D.

Ответ: $\dfrac{36+31\sqrt{2}}{16}$.

98. (ВМК) В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ с параллельными гранями $ABCD$ и $A_1B_1C_1D_1$ длина ребра равна 1. Точки K и N являются серединами ребер DC и BC соответственно. Точка M лежит на ребре CC_1 и $MC = \dfrac{2}{3}$. Найдите минимальное значение радиусов сфер, проходящих через точки M, N, K и касающихся плоскости BB_1D_1D.

Ответ: $\dfrac{57\sqrt{2}-64}{36}$.

99. (Физфак) В правильной треугольной пирамиде угол при вершине между двумя боковыми ребрами равен β. Найдите двугранный угол при основании пирамиды.

Ответ: $\arccos\left(\dfrac{\sqrt{3}}{3}\operatorname{tg}\dfrac{\beta}{2}\right)$.

100. (Физфак) В правильной треугольной пирамиде $SABC$ (S — вершина) проведено сечение плоскостью, проходящей через точки B и C и делящей ребро SA в отношении $m : n$, считая от вершины S. Известно, что объем пирамиды $SABC$ равен V, а расстояние от центра основания ABC до плоскости сечения равно d. Найдите площадь сечения.

Ответ: $\dfrac{n}{m+n}\cdot\dfrac{V}{d}$.

101. (Физфак) В правильной четырехугольной пирамиде высота равна H, а двугранный угол при боковом ребре равен α. Найдите объем пирамиды.

Ответ: $\frac{2}{3}H^3\left(\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}-1\right)$.

102. (Физфак) В правильной треугольной пирамиде высота равна H, а плоский угол при вершине равен α. Найдите объем пирамиды.

Ответ: $\dfrac{H^3\sqrt{3}}{3\operatorname{ctg}^2\frac{\alpha}{2}-1}$.

103. (Мехмат) Основанием вписанной в сферу четырехугольной пирамиды $SABCD$ служит прямоугольник $ABCD$. Найдите SD, если $SA = 7$, $SB = 2$, $SC = 6$ и $\angle SAD = \angle SBD = \angle SCD$.

Ответ: 9.

104. (Мехмат) Основанием вписанной в сферу четырехугольной пирамиды $SABCD$ служит прямоугольник $ABCD$. Найдите BD, если $SA = 4$, $SB = 8$, $SD = 7$ и $\angle SAC = \angle SBC = \angle SDC$.

Ответ: 9.

105. (Мехмат) На ребрах AA', AB, $B'C'$ и BC единичного куба $ABCDA'B'C'D'$ взяты точки K, L, M и N соответственно так, что $AL = \frac{2}{3}$, $B'M = \frac{1}{4}$, $CN = \frac{3}{10}$. Определите, какое из ребер AB или AD пересекает плоскость, параллельную отрезку ML и содержащую отрезок KN. В каком отношении это ребро делится плоскостью?

Ответ: AB; в любом отношении от 0 до $\frac{1}{56}$, считая от вершины A.

106. (Мехмат) На ребрах $A'B'$, AB, $A'D'$ и DD' единичного куба $ABCDA'B'C'D'$ взяты точки K, L, M и N соответственно так, что $A'K = \frac{2}{3}$, $AL = \frac{1}{5}$, $A'M = \frac{1}{3}$. Определите, какое из ребер $A'D'$ или $D'C'$ пересекает плоскость, параллельную отрезку ML и содержащую отрезок KN. В каком отношении это ребро делится плоскостью?

Ответ: $D'C'$; в любом отношении от 0 до $\frac{1}{59}$, считая от вершины D'.

107. (Мехмат) В треугольной пирамиде $AKLM$ выполнено $AK = AL = AM$, $KL = LM = MK$, $\operatorname{tg}(\angle AKM) = \frac{7}{\sqrt{3}}$. Сфера радиуса $2\sqrt{3}$ касается луча LA, касается плоскости AKM и касается плоскости KLM в точке, лежащей на луче LM. Найдите наибольшее возможное значение длины отрезка LM.

Ответ: $\frac{1}{49}(48\sqrt{13} - 74\sqrt{3})$.

108. (Мехмат) В треугольной пирамиде $SABC$ выполнено $SA = SB = SC$, $AB = BC = AC$, $\operatorname{tg}(\angle SAC) = \frac{2}{\sqrt{3}}$. Сфера радиуса $\sqrt{3}$ касается луча AS, касается плоскости ABC в точке, лежащей на луче AC. Найдите наибольшее возможное значение длины отрезка AC.

Ответ: $\frac{1}{4}(11\sqrt{3} + 3\sqrt{7})$.

109. (ВМК) Сфера с центром в точке O проходит через вершины A, B и C треугольной пирамиды $ABCD$ и пересекает прямые AD, BD и CD в точках K, L и M соответственно. Известно, что $AD = 10$, $BC : BD = 3 : 2$ и $AB : CD = 4\sqrt{3} : 11$. Проекциями точки O на плоскости ABD, BCD и CAD являются середины ребер AB, BC и AC соответственно. Расстояние между серединами ребер AB и CD равно 13. Найдите периметр треугольника KLM.

Ответ: $P = 41 \cdot \left(\frac{2\sqrt{105}}{110} + \frac{\sqrt{3}}{10} + \frac{2}{22}\right)$.

110. (ВМК) Сфера с центром в точке O проходит через вершины K, L и M треугольной пирамиды $KLMN$ и пересекает ребра KN, LN и MN в точках A, B и C соответственно. Известно, что $NL = 14$, $KN = 16$ и $MN : KL = 2\sqrt{5} : 3$. Проекциями точки O на плоскости KLN, LMN и KMN являются середины ребер KL, LM и KM соответственно. Расстояние между серединами ребер KL и MN равно $\sqrt{145}$. Найдите периметр треугольника ABC.

Ответ: $P = 17 \cdot \left(\frac{\sqrt{6}}{5} + \frac{3\sqrt{5}}{14} + \frac{18}{35}\right)$.

111. (Физфак) В правильной четырехугольной пирамиде $SBCDE$ с вершиной S боковое ребро равно b, а двугранный угол между боковыми гранями равен α. Найдите объем пирамиды, отсекаемой от данной пирамиды плоскостью, проходящей через диагональ BD основания и середину бокового ребра SC.

Ответ: $\frac{b^3}{6}\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}\left(1-\operatorname{ctg}^2\frac{\alpha}{2}\right)$.

112. (Физфак) В прямоугольном параллелепипеде диагональ, равная d, образует с боковыми гранями углы β и γ. Найдите объем параллелепипеда.

Ответ: $d^3\sin\beta\sin\gamma\sqrt{\cos^2\gamma-\sin^2\beta}$.

113. (Биофак) Плоское сечение SAB, проходящее через вершину S прямого кругового конуса, имеет площадь 60 см^2. Точки A и B, лежащие на окружности основания конуса, делят ее длину в отношении $1:5$. Найдите объем конуса, если $\angle SAB$ равен $\arccos\left(\frac{2}{\sqrt{29}}\right)$.

Ответ: $32\pi\sqrt{78}$ см^3.

114. (Биофак) Дан прямой круговой конус объемом 18π см^3. Через его вершину S проведено плоское сечение SDC, отсекающее на окружности основания дугу CD, длина которой в 3 раза меньше длины всей окружности. Угол SCD равен $\arcsin\sqrt{\frac{5}{17}}$. Найдите площадь сечения SCD.

Ответ: $\frac{9}{2}\sqrt{15}$ см^2.

115. (Геогрфак) В сферу радиуса R вписан прямой круговой цилиндр. Найдите наибольшее значение боковой поверхности цилиндра и отношение его высоты к радиусу сферы в этом случае.

Ответ: $2\pi R^2$; $\sqrt{2}$.

116. (Геогрфак) Вокруг сферы радиуса r описан прямой круговой конус. Найдите наименьшее значение объема конуса и отношение его высоты к радиусу сферы в этом случае.

Ответ: $\frac{8\pi}{3}r^3$; 4.

Московский физико-технический институт

117. В основании пирамиды $SABCD$ лежит ромб $ABCD$, ребро SD перпендикулярно основанию, $SD = 6$, $BD = 3$, $AC = 2$. Сечения пирамиды двумя параллельными плоскостями, одна из которых проходит через точку B, а другая — через точки A и C, имеют равные площади. В каком отношении делят ребро SD плоскости сечений? Найдите расстояние между плоскостями сечений и объемы многогранников, на которые пирамида разбивается этими плоскостями.

Ответ: $1 : 1 : 1$; $h = \frac{6}{5}$; $V_1 = V_3 = 1$, $V_2 = 4$.

118. Окружность основания цилиндра вписана в боковую грань SAB правильной четырехугольной пирамиды $SABCD$ (S — вершина), центр другого основания цилиндра лежит в плоскости SBC. Найдите объем цилиндра, если $AB = 6$, $SB = 5$.

Ответ: $\frac{15\sqrt{7}}{8}\pi$.

119. На ребре AC правильной треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ взята точка K так, что $AK = \frac{1}{4}$, $CK = \frac{3}{4}$. Через точку K проведена плоскость, не проходящая через ребро призмы, образующая с плоскостью ABC угол $\operatorname{arctg}\frac{7}{6}$ и рассекающая призму на два многогранника, площади поверхностей которых равны. Найдите объем призмы, если известно, что около одиого из этих многогранников можно описать сферу, а около другого — нет.

Ответ: $\frac{3}{8}$.

120. Все грани призмы $ABCDA_1B_1C_1D_1$ касаются некоторого шара. Основанием призмы служит квадрат $ABCD$ со стороной, равной 5. Угол C_1CD — острый, а $\angle C_1CB = \operatorname{arctg}\frac{5}{3}$. Найдите $\angle C_1CD$, угол между боковым ребром и плоскостью основания призмы, а также расстояние от точки C до точки касания шара с плоскостью AA_1D.

Ответ: $\operatorname{arctg}\frac{5}{3}$; $\arccos\frac{3}{\sqrt{17}}$; $4\sqrt{3}$.

121. В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$, ребро которого равно 6, точки M и N — середины ребер AB и B_1C_1 соответственно, а точка K расположена на ребре CD так, что $CK = 2KD$. Найдите:

1) расстояние от точки N до прямой AK;
2) расстояние между прямыми MN и AK;
3) расстояние от точки A_1 до плоскости треугольника MKN.

Ответ: 1) $3\sqrt{\frac{13}{2}}$; 2) $\frac{9}{\sqrt{11}}$; 3) $\frac{78}{\sqrt{197}}$.

122. В правильной треугольной пирамиде $DABC$ сторона основания ABC равна a. Внутри пирамиды расположен конус, окружность основания которого вписана в треугольник ACD, а вершиной конуса является точка O, где OD — высота пирамиды. Найдите радиус основания конуса и радиус шара, касающегося конуса и трех граней пирамиды с общей точкой B.

Ответ: $\frac{a}{2\sqrt{7}}$; $\frac{2a(2\sqrt{21} - 9)}{3}$.

123. Внутри цилиндра лежат два шара радиусов r и один шар радиуса $\frac{3}{2}r$ так, что каждый шар касается двух других и боковой поверхности цилиндра, причем первые два равных шара касаются нижнего основания, а третий шар касается верхнего основания цилиндра. Найдите радиус основания цилиндра, если его высота равна $4r$.

Ответ: $\frac{3(17 + 10\sqrt{3})r}{44}$.

124. В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ с ребром a через точку A параллельно прямой BD проведена плоскость P, образующая с прямой AB угол, равный $\arcsin\frac{1}{2\sqrt{2}}$. Найдите площадь сечения куба плоскостью P и радиус шара, касающегося плоскости P и граней $ABCD$, BCC_1B_1, DCC_1D_1.

Ответ: $\frac{2a^2}{\sqrt{3}}$; $\frac{a\sqrt{2}}{2 + \sqrt{3} + \sqrt{2}}$.

125. В треугольной пирамиде $ABCD$ ребра AB и CD взаимно перпендикулярны, $AD = BC$, расстояние от середины E ребра AB до плоскости ACD равно h, $\angle DAC = \frac{\pi}{2}$, $\angle ACD = \frac{\pi}{4}$, угол между ребром DC и гранью ABC равен $\frac{\pi}{6}$. Найдите расстояние от точки E до плоскости BCD, угол между ребром AB и гранью ACD, а также угол между гранями ABD и ABC.

Ответ: h; $\arcsin\frac{1}{\sqrt{3}}$; $\frac{2\pi}{3}$.

126. Правильная треугольная призма $ABCA_1B_1C_1$ пересечена плоскостью, проходящей через середины ребер AB, A_1C_1, BB_1. Постройте сечение призмы, найдите площадь сечения и вычислите угол между плоскостью основания ABC и плоскостью сечения, если сторона основания равна 4, а высота призмы равна $\frac{\sqrt{42}}{7}$.

Решение. Пусть точки D, P, N — середины ребер соответственно AB, A_1C_1, BB_1 (рис. 34). Строим точки: $F = DN \cap AA_1$; $Q = DN \cap A_1B_1$; $K = PF \cap AC$; $M = PQ \cap B_1C_1$. Пятиугольник $PMNDK$ — искомое сечение призмы.

Найдем угол α между плоскостью основания ABC и плоскостью сечения призмы.

Если $PL \| AA_1$ ($L \in AC$) и $PE \perp DK$, то по теореме о трех перпендикулярах $LE \perp DK$, значит, $\angle PEL = \alpha$. Тогда $\operatorname{tg}\alpha = \frac{PL}{LE}$.

Так как LE — высота $\triangle DKL$, то $LE = \frac{S_{\triangle DKL}}{KD}$.

Найдем $S_{\triangle DKL}$ и длину отрезка KD.

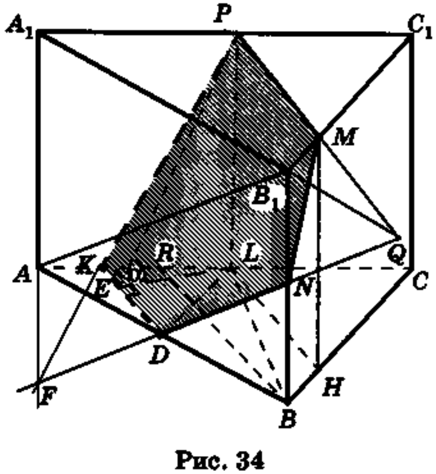


Рис. 34

Так как DN — средняя линия $\triangle ABB_1$ и $AA_1 \| BB_1$, то $AF = NB_1 = \frac{1}{2}BB_1$, следовательно, $AF : AA_1 = 1 : 3$. Вследствие $AK \| A_1P$ и $PL \| AA_1$, имеем: $AK : A_1P = AK : AL = AF : A_1F = 1 : 3$, значит, $AK = \frac{1}{3}AL = \frac{1}{6}AC = \frac{1}{6} \cdot 4 = \frac{2}{3}$. Тогда $KL = \frac{2}{3}AL$, поэтому $S_{\triangle DKL} = \frac{2}{3}S_{\triangle ADL} = \frac{2}{3} \cdot \left(\frac{1}{4}S_{\triangle ABC}\right) = \frac{1}{6}S_{\triangle ABC} = \frac{1}{6} \cdot \frac{AB^2\sqrt{3}}{4} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$. Далее, в $\triangle ADR$ (по теореме косинусов):

$$DK = \sqrt{AK^2 + AD^2 - 2AK \cdot AD \cdot \cos 60^\circ} =$$

$$= \sqrt{\frac{4}{9} + 4 - 2 \cdot \frac{2}{3} \cdot 2 \cdot \frac{1}{2}} = \frac{2\sqrt{7}}{3}.$$

Тогда $LE = \frac{2S_{\triangle DKL}}{KD} = \frac{2 \cdot \frac{2\sqrt{3}}{3}}{\frac{2\sqrt{7}}{3}} = \frac{2\sqrt{21}}{7}$. Таким образом, получаем:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{PL}{LE} = \frac{\frac{\sqrt{42}}{7}}{\frac{2\sqrt{21}}{7}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \cos \alpha = \sqrt{\frac{2}{3}} \Rightarrow \alpha = \arccos \sqrt{\frac{2}{3}}.$$

Теперь найдем S_{DKPMN} — площадь сечения $DKPMN$.

Проведем $MH \| BB_1$ ($H \in BC$), тогда пятиугольник $DKLHB$ — ортогональная проекция сечения $DKPMN$ на плоскость основания ABC, значит, $S_{DKPMN} = \frac{S_{DKLHB}}{\cos \alpha}$. Так как $S_{DKLHB} = S_{\triangle ABC} - S_{\triangle ADK} - S_{\triangle HCL}$, то для нахождения S_{DKLHB} достаточно найти $S_{\triangle ABC}$, $S_{\triangle ADK}$ и $S_{\triangle HCL}$.

Так как $(ABC) \| (A_1B_1C_1)$, то $PM \| KD$, тогда вследствие $PL \| MH \| BB_1$ получаем $LH \| KD \| BR$ (R — середина KL). Это означает, что $CL : CR = CH : CB = 3 : 4$, откуда $CH = \frac{3}{4}BC$. Учитывая, что $S_{\triangle ABC} = 4\sqrt{3}$, имеем:

$$AK = \frac{1}{3}AL \Rightarrow S_{\triangle ADK} = \frac{1}{3}S_{\triangle ADL} = \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{1}{4}S_{\triangle ABC}\right) =$$

$$= \frac{1}{12}S_{\triangle ABC} = \frac{1}{12} \cdot 4\sqrt{3} = \frac{\sqrt{3}}{3};$$

$$CH = \frac{3}{4}BC \Rightarrow S_{\triangle HCL} = \frac{3}{4}S_{\triangle BCL} =$$

$$= \frac{3}{4} \cdot \left(\frac{1}{2}S_{\triangle ABC}\right) = \frac{3}{8}S_{\triangle ABC} = \frac{3}{8} \cdot 4\sqrt{3} = \frac{3\sqrt{3}}{2}.$$

Таким образом,

$$S_{DKLHB} = S_{\triangle ABC} - S_{\triangle ADK} - S_{\triangle HCL} = 4\sqrt{3} - \frac{\sqrt{3}}{3} - \frac{3\sqrt{3}}{2} = \frac{13\sqrt{3}}{6}.$$

Тогда

$$S_{DKPMN} = \frac{S_{DKLHB}}{\cos\alpha} = \frac{\frac{13\sqrt{3}}{6}}{\sqrt{\frac{2}{3}}} = \frac{13\sqrt{2}}{4}.$$

$\boxed{!}$ ***Замечание.*** Площадь пятиугольника $DKLHB$ можно найти и как сумму площадей трапеций $BRKD$ и $BRLH$, высота каждой из которых равна $0{,}5\ LE$.

Ответ: $\arccos\sqrt{\frac{2}{3}}$; $\frac{13\sqrt{2}}{4}$.

127. В основании четырехугольной пирамиды $SKLMN$ лежит равнобедренная трапеция $KLMN$, описанная около окружности и такая, что $KN = LM = 4$, $MN > KL$ и угол между прямыми KN и LM равен $\frac{\pi}{3}$. Две противоположные боковые грани этой пирамиды перпендикулярны основанию, $SM = 12$. Найдите расстояние от точки M до плоскости SKL.

Внутри пирамиды расположен конус так, что окружность его основания вписана в треугольник SMN, а вершина основания принадлежит грани SKL. Вычислите высоту конуса.

Ответ: $\frac{12\sqrt{111}}{37}$; $\frac{48\sqrt{15}}{65}$.

128. Ребро правильного тетраэдра $ABCD$ равно a, точка K — середина ребра AB, точка E лежит на ребре CD и $EC : ED = 1 : 3$, точка F — центр грани ABC. Найдите угол между прямыми BC и KE, расстояние между этими прямыми и радиус сферы, проходящей через точки A, B, E и F.

Ответ: $\arccos\frac{5}{6}$; $\frac{a}{\sqrt{22}}$; $\frac{a}{8}\sqrt{\frac{451}{2}}$.

129. Сторона основания $ABCD$ правильной пирамиды $SABCD$ равна 2, угол между боковым ребром и основанием равен $\arccos\frac{1}{\sqrt{5}}$. На ребрах SA и SD расположены точки E и F так, что $AE = 2ES$, $DF = 8SF$. Через точки E и F проведена плоскость α, параллельная AB. Найдите:

1) площадь фигуры, полученной при пересечении пирамиды плоскостью α;

2) радиус сферы с центром в точке A, касающейся плоскости α;

3) угол между плоскостью α и плоскостью ABC.

Ответ: 1) $\frac{16\sqrt{3}}{81}$; 2) $\frac{2\sqrt{6}}{9}$; 3) $\arccos\frac{1}{\sqrt{3}}$.

130. В правильной треугольной пирамиде $DABC$ сторона основания ABC равна 6, угол между боковыми гранями равен $\arccos\frac{1}{10}$. В треугольнике ABD проведена биссектриса BA_1, а в треугольнике BCD проведены медиана BC_1 и высота CB_1. Найдите:

1) объем пирамиды $A_1B_1C_1D$;

2) площадь проекции треугольника $A_1B_1C_1$ на плоскость ABC.

Ответ: 1) $\frac{3\sqrt{11}}{28}$; 2) $\frac{20\sqrt{3}}{21}$.

131. В правильной треугольной пирамиде $ABCD$ $\angle ADC = 2\arcsin\frac{1}{3}$, сторона основания ABC равна 2. Точки K, M, N — середины ребер AB, CD, AC соответственно. Точка E лежит на отрезке CM и $3ME = CE$. Через точку E проходит плоскость P перпендикулярно отрезку KN. В каком отношении плоскость P делит ребра пирамиды? Найдите площадь сечения пирамиды плоскостью P и расстояние от точки N до плоскости P.

Ответ: $\frac{25\sqrt{23}}{99}$; $\frac{7}{8}$.

Московский государственный технический университет им. Н. Э. Баумана

132. Какую наименьшую площадь может иметь сечение правильной треугольной пирамиды плоскостью, проходящей через высоту основания, если пирамида вписана в сферу радиуса R, а ее высота равна высоте основания? Найдите угол между секущей плоскостью и основанием пирамиды, когда площадь сечения наименьшая.

Решение. (Геометрический способ.) Пусть $PABC$ — данная правильная пирамида с вершиной P и основанием ABC; AD — высота ABC; PO — высота пирамиды (рис. 35).

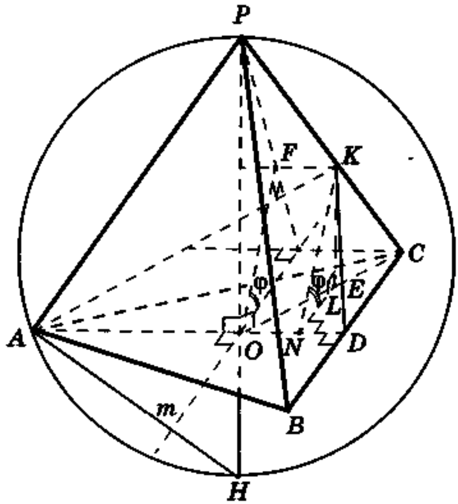


Рис. 35

Пирамида $PABC$ — правильная, поэтому основание O высоты PO является центром правильного треугольника ABC ($O \in AD$), а так как, кроме того, пирамида вписана в сферу, то центр сферы лежит в плоскости APO — на прямой OP. Пусть H — точка пересечения прямой OP со сферой, тогда отрезок PH — диаметр этой сферы. (На рис. 35 нет изображения сферы, а проведена лишь окружность — сечение этой сферы плоскостью AOP.)

Предположим, что $\triangle ADK$ — одно из сечений данной пирамиды плоскостью, проходящей через высоту AD треугольника ABC, при этом $K \in PC$ и KN — высота $\triangle ADK$ ($N \in AD$, $KN \perp AD$). Площадь $S_{\triangle ADK}$ треугольника ADK будет наименьшей при наименьшей длине высоты KN, т. е. при наименьшем расстоянии от точки, принадлежащей прямой PC, до прямой AD. Это расстояние равно длине общего перпендикуляра скрещивающихся прямых PC и AD. Таким образом, площадь $S_{\triangle ADK}$ будет наименьшей, если отрезок KN — общий перпендикуляр скрещивающихся прямых PC и AD. Это означает, что для решения задачи достаточно найти расстояние между скрещивающимися прямыми PC и AD.

! ***Замечание.*** В некоторых случаях для нахождения расстояния между скрещивающимися прямыми a и b удобно использовать следующий метод.

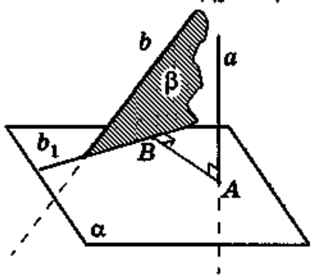


Рис. 36

Построим плоскость α, перпендикулярную прямой a, и ортогонально спроектируем прямую b на эту плоскость (рис. 36). Пусть прямая b_1 — проекция прямой b на плоскость α; β — плоскость, проектирующая прямую b на плоскость α, т. е. $b_1 = \beta \cap \alpha$. Так как $a \perp \alpha$ и $\beta \perp \alpha$, то $a \| \beta$. Это означает, что если A — точка пересечения прямой a с плоскостью α, то расстояние от точки A до прямой b_1 равно расстоянию между прямой a и параллельной ей плоскостью β, содержащей прямую b, значит, равно расстоянию между данными скрещивающимися прямыми a и b: $\rho(a; b) = \rho(A; b_1)$.

Теперь продолжим решение нашей задачи.

Проведем через OP плоскость α, перпендикулярную прямой AD. Прямая m, по которой проведенная плоскость α пересекается с плоскостью ABC, перпендикулярна AD, а так как $BC \perp AD$, то $m \| BC$. Ортогональной проекцией прямой PC на плоскость α является прямая PE, где E — точка пересечения прямой m и прямой, проходящей через точку C параллельно AD ($AD \perp \alpha$). Тогда, согласно сделанному выше замечанию, расстояние между скрещивающимися прямыми PC и AD равно расстоянию от точки O до прямой PE, т. е. длине высоты OF ($F \in PE$) треугольника OPE.

Из сказанного следует, что точка K — вершина искомого треугольника с наименьшей площадью — есть точка пересечения прямой PC и прямой, проходящей через F параллельно AD, а высота KN треугольника ADK равна и параллельна OF. Если при этом $KL \perp (ABC)$, $L \in OC$, то по теореме о трех перпендикулярах $\angle KNL$ — линейный угол двугранного угла, образованного плоскостью основания пирамиды и плоскостью ее сечения с наименьшей площадью.

Теперь найдем площадь $S_{\triangle ADK}$ треугольника ADK.

Так как $S_{\triangle ADK} = \frac{1}{2} AD \cdot KN$, то достаточно найти длины отрезков AD и KN, но $KN = OF$, поэтому найдем AD и OF.

Обозначим $OP = h$, тогда $AD = OP = h$, значит, $AO = \frac{2}{3}AD = \frac{2}{3}h$. В прямоугольном треугольнике APH (PH — диаметр сферы) $PH = 2R$, $OH = PH - PO = 2R - h$, $AO \perp PH$, значит, $AO^2 = OP \cdot OH$, т. е. равно $\left(\frac{2}{3}h\right)^2 = (2R - h) \cdot h$, откуда $h = \frac{18}{13}R = AD$. Тогда в $\triangle ADC$: $DC = AD \cdot \operatorname{tg} 30° = \frac{h}{\sqrt{3}}$. Так как $OE \parallel BC$ и $EC \parallel AD$, то $OE = DC = \frac{h}{\sqrt{3}}$.

Длина высоты OF прямоугольного треугольника OPE, проведенной к гипотенузе PE, находится по формуле

$$OF = \frac{2S_{\triangle OPE}}{PE} = \frac{OP \cdot OE}{\sqrt{OP^2 + OE^2}} = \frac{h \cdot \frac{h}{\sqrt{3}}}{\sqrt{h^2 + \left(\frac{h}{\sqrt{3}}\right)^2}} =$$

$$= \frac{h}{2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{18}{13}R = \frac{9}{13}R. \text{ Тогда}$$

$$S_{\triangle ADK} = \frac{1}{2}AD \cdot KN = \frac{1}{2} \cdot AD \cdot OF = \frac{1}{2} \cdot \frac{18}{13}R \cdot \frac{9}{13}R = \frac{81}{169}R^2.$$

Как уже отмечалось выше, линейным углом двугранного угла, образованного плоскостью основания пирамиды и плоскостью ее сечения с наименьшей площадью, является $\angle KNL$, который равен $\angle FOE$ (почему?).

Обозначим величину угла FOE через φ: $\varphi = \angle FOE$. Найдем φ в прямоугольном треугольнике FOE:

$$\cos\varphi = \frac{OF}{OE} = \frac{\frac{9}{13}R}{\frac{18}{13\sqrt{3}}R} = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \varphi = 30°.$$

Решим эту задачу а л г е б р а и ч е с к и м м е т о д о м (с помощью свойств квадратичной функции), пользуясь рисунком 35 и всеми предыдущими пояснениями к этому рисунку.

Очевидно, что величина площади $S_{\triangle ADK}$ треугольника ADK зависит от длины его высоты KN ($|AD| = \text{const}$), которая, в свою очередь, зависит от положения на ребре PC вершины K этого треугольника, а положение точки K зависит от ее расстояния до плоскости ABC, т. е. от длины перпендикуляра KL к этой плоскости.

Пусть $KL = x\,(0 < x < h)$. Из подобия треугольников POC и KLC получаем: $\frac{OP}{KL} = \frac{OC}{LC} \Rightarrow LC = \frac{KL \cdot OC}{OP} = \frac{x \cdot \frac{2}{3}h}{h} = \frac{2}{3}x$. Тогда $OL = OC - LC = \frac{2}{3}h - \frac{2}{3}x = \frac{2}{3}(h - x)$, поэтому в прямоугольном $\triangle LON$, в котором $\angle OLN = 30°$, получаем $LN = OL \cdot \cos 30° = \frac{2}{3}(h - x) \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{h - x}{\sqrt{3}}$.

В прямоугольном $\triangle LKN$ по теореме Пифагора имеем:

$$KN^2 = KL^2 + LN^2 = x^2 + \left(\frac{h - x}{\sqrt{3}}\right)^2 = \frac{4x^2 - 2hx + h^2}{3}.$$

Рассмотрим квадратичную функцию $f(x) = \frac{4}{3}x^2 - \frac{2}{3}hx + \frac{1}{3}h^2$.

Эта функция при $x = \frac{\frac{2}{3}h}{2 \cdot \frac{4}{3}} = \frac{h}{4}$ принимает наименьшее значение, которое равно: $f\left(\frac{h}{4}\right) = \frac{4 \cdot \frac{h^2}{16} - 2h \cdot \frac{h}{4} + h^2}{3} = \frac{h^2}{4}$. Следовательно, наименьшее значение квадрата длины отрезка KN равно $\frac{h^2}{4}$, откуда наименьшее значение длины высоты KN треугольника ADK равно $\frac{h}{2}$. Тогда $S_{\triangle ADK} = \frac{1}{2}AD \cdot KN = \frac{1}{2} \cdot h \cdot \frac{h}{2} = \frac{h^2}{4}$. Учитывая, что $h = \frac{18}{13}R$ (эта зависимость между h и R известна из проведенных выше рассуждений), получаем наименьшее значение площади треугольника ADK: $S_{\triangle ADK} = \frac{81}{169}R^2$.

Наконец, в прямоугольном треугольнике LKN находим величину линейного угла φ двугранного угла, образованного плоскостью основания пирамиды и плоскостью ее сечения с наименьшей площадью:

$$\sin\varphi = \frac{KL}{KN} = \frac{\frac{h}{4}}{\frac{h}{2}} = \frac{1}{2} \Rightarrow \varphi = 30°.$$

Ответ: $\frac{81}{169}R^2$; $30°$.

133. Основанием пирамиды $TABCD$ служит прямоугольник $ABCD$ со стороной $AB = 3$ и диагональю $AC = 5$. Высота пирамиды $TO = 6$ проходит через точку O пересечения диагоналей основания. Какую наименьшую площадь может иметь треугольник ACP, если точка P лежит на ребре TB?

Ответ: $\dfrac{30}{\sqrt{29}}$.

134. Основанием прямой призмы $ABCA_1B_1C_1$ служит равнобедренный прямоугольный треугольник ABC с катетами $AB = BC = 3$; боковое ребро призмы $BB_1 = 4$. Какую наименьшую площадь может иметь треугольник BCM, если точка M лежит на диагонали боковой грани AC_1? На какие части делит точка M диагональ AC_1 в этом случае?

Ответ: $\dfrac{18}{5}$; $\dfrac{9\sqrt{34}}{25}$; $\dfrac{16\sqrt{34}}{25}$.

Теоремы геометрии 11 класса

Теорема 1. **Композиция двух движений пространства есть движение.**

Теорема 2. **Движение пространства отображает:**

а) отрезок на равный ему отрезок;

б) прямую на прямую;

в) луч на луч;

г) треугольник на равный ему треугольник;

д) плоскость на плоскость;

е) полуплоскость на полуплоскость;

ж) тетраэдр на равный ему тетраэдр;

з) полупространство на полупространство.

Теорема 3. **При центральной симметрии пространства:**

1. а) прямая, проходящая через центр симметрии, отображается на себя;

б) прямая, не проходящая через центр симметрии, отображается на параллельную ей прямую;

2. а) плоскость, проходящая через центр симметрии, отображается на себя;

б) плоскость, не проходящая через центр симметрии, отображается на параллельную ей плоскость.

Теорема 4. **Поворот вокруг оси есть движение.**

Теорема 5. **Всякое движение пространства есть композиция не более четырех симметрий относительно плоскости.**

Теорема 6. **При гомотетии с коэффициентом k расстояние между точками изменяется в $|k|$ раз.**

Теорема 7. **При гомотетии плоскость отображается на параллельную ей или совпадающую с ней плоскость.**

Теорема 8. **Подобие с коэффициентом k можно разложить в композицию движения и гомотетии с некоторым центром и тем же коэффициентом.**

Теорема 9 (***теорема Декарта—Эйлера для выпуклого многогранника***). **Для любого выпуклого многогранника сумма числа** вершин В и числа граней Г на две единицы больше числа его ребер Р, т. е. справедлива формула В − Р + Г = 2.

Теорема 10. Плоскость, проходящая через внутреннюю точку выпуклого многогранника, пересекает его по выпуклому многоугольнику.

Теорема 11. Площадь боковой поверхности прямой призмы равна произведению периметра основания призмы на боковое ребро.

Теорема 12. Площадь боковой поверхности наклонной призмы равна произведению периметра перпендикулярного сечения призматической поверхности на боковое ребро.

Теорема 13. Объем призмы равен произведению площади основания на высоту.

Теорема 14. Объем наклонной призмы равен произведению площади перпендикулярного сечения призматической поверхности на боковое ребро.

Теорема 15. Квадрат длины диагонали прямоугольного параллелепипеда равен сумме квадратов длин трех его ребер, исходящих из одной вершины.

Теорема 16. В трехгранном угле величина каждого плоского угла меньше суммы величин двух других его плоских углов.

Теорема 17. Площадь боковой поверхности правильной пирамиды равна половине произведения периметра основания на апофему пирамиды.

Теорема 18. Если все боковые грани пирамиды наклонены к плоскости основания под углом φ, и высота пересекает основание, то $S_{\text{бок}} = \dfrac{S_{\text{осн}}}{\cos\varphi}$.

Теорема 19. Если пирамида пересечена плоскостью, параллельной основанию, то: 1) боковые ребра и высота делятся этой плоскостью на пропорциональные части; 2) в сечении получается многоугольник, подобный основанию; 3) площади сечения и основания относятся, как квадраты их расстояний от вершины.

Теорема 20. Площадь боковой поверхности правильной усеченной пирамиды равна произведению полусуммы периметров ее оснований на апофему.

Теорема 21. Объем любой треугольной пирамиды равен одной трети произведения площади основания на высоту.

Теорема 22. Объем любой пирамиды равен одной трети произведения площади основания на высоту.

Теорема 23. Объем усеченной пирамиды, у которой площади оснований равны S_1 и S_2, а высота — H, вычисляется по формуле $V = \frac{1}{3}H(S_1 + \sqrt{S_1S_2} + S_2)$.

Теорема 24. Существует пять различных (с точностью до подобия) правильных многогранников: правильный тетраэдр, правильный гексаэдр (куб), правильный октаэдр, правильный додекаэдр и правильный икосаэдр.

Теорема 25. Площадь боковой поверхности цилиндра равна произведению длины окружности основания на высоту.

Теорема 26. Площадь боковой поверхности конуса равна произведению половины длины окружности основания на образующую.

Теорема 27. Если конус пересечен плоскостью, параллельной основанию, то:

1) все образующие и высота конуса делятся этой плоскостью на пропорциональные части;

2) в сечении получается круг, подобный основанию;

3) площади сечения и основания относятся, как квадраты их расстояний от вершины.

Теорема 28. Площадь боковой поверхности усеченного конуса равна произведению полусуммы длин окружностей оснований на образующую.

Теорема 29 (*о пересечении шара и сферы с плоскостью*).

1) Если расстояние от центра шара до данной плоскости меньше радиуса шара, то пересечением шара с плоскостью является круг. Центром этого круга является основание перпендикуляра, проведенного из центра шара на плоскость, или сам центр шара, если плоскость проходит через этот центр. Пересечением сферы с плоскостью является окружность указанного круга. Радиус r сечения в этом случае равен $r = \sqrt{R^2 - d^2}$, где R — радиус шара, а d — расстояние от центра шара до плоскости сечения.

2) Если расстояние от центра шара до данной плоскости равно радиусу шара, то плоскость имеет с шаром и ограничивающей его сферой только одну общую точку.

3) Если расстояние от центра шара до данной плоскости больше радиуса, то плоскость не имеет с шаром общих точек.

Теорема 30. Если плоскость касается сферы, то она перпендикулярна радиусу, проведенному в точку касания.

Теорема 31. Если плоскость проходит через точку сферы и перпендикулярна радиусу, проведенному в эту точку, то она касается сферы.

ПРИЛОЖЕНИЯ

Приложение 1. Формулы планиметрии

Треугольник

Содержание формулы	Формула	Символы (обозначения)
Периметр (P)	$P = a + b + c$; $p = \dfrac{a + b + c}{2}$	a, b, c — длины сторон; p — полупериметр
Сумма внутренних углов	$A + B + C = 180°$	A, B, C — величины углов
Теорема косинусов	$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$; $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos B$; $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C$; $\cos A = \dfrac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$	a, b, c — длины сторон; A, B, C — величины углов; R — радиус описанной окружности
Теорема синусов	$\dfrac{a}{\sin A} = \dfrac{b}{\sin B} = \dfrac{c}{\sin C}$	
Радиус описанной окружности	$2R = \dfrac{a}{\sin A} = \dfrac{b}{\sin B} = \dfrac{c}{\sin C}$	
Площадь (S)	$S = \frac{1}{2}ah_a = \frac{1}{2}bh_b = \frac{1}{2}ch_c$; $S = \frac{1}{2}ab\sin C = \frac{1}{2}ac\sin B = \frac{1}{2}\ bc\sin A$; $S = pr$; $S = \dfrac{abc}{4R}$	a, b, c — длины сторон; h_a, h_b, h_c — длины высот; A, B, C — величины углов; p — полупериметр; r — радиус вписанной окружности; R — радиус описанной окружности

Окончание таблицы

Содержание формулы	Формула	Символы (обозначения)
Отношение площадей двух треугольников ABC и $A_1B_1C_1$, имеющих равные углы с вершинами A и A_1	$\frac{S_{A_1B_1C_1}}{S_{ABC}} = \frac{A_1B_1 \cdot A_1C_1}{AB \cdot AC}$	AB, AC, A_1B_1, A_1C_1 — длины сторон треугольников
Формула Герона	$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$	a, b, c — длины сторон; m_a — длины медианы к стороне a; m, n — длины отрезков, на которые биссектриса угла C делит сторону c; h_a, h_b, h_c — длины высот; r — радиус вписанной окружности
Связь между медианой и сторонами	$m_a^2 = \frac{2b^2 + 2c^2 - a^2}{4}$	
Свойство биссектрисы внутреннего угла	$\frac{m}{n} = \frac{a}{b}$	
Связь между высотами и радиусом вписанной окружности	$\frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c} = \frac{1}{r}$	

Прямоугольный треугольник

Содержание формулы	Формула	Символы (обозначения)
Сумма острых углов	$A + B = 90°$	A, B — величины острых углов
Теорема Пифагора	$a^2 + b^2 = c^2$	a, b — длины катетов; c — длина гипотенузы; h_c —длина высоты; a_1, b_1 — длины проекций катетов на гипотенузу; r — радиус вписанной окружности; R — радиус описанной окружности
Метрические соотношения	$h_c^2 = a_1 \cdot b_1$; $a^2 = c \cdot a_1$, $b^2 = c \cdot b_1$	
Зависимость между сторонами, радиусами вписанной и описанной окружностей	$R = \frac{c}{2}$; $r = \frac{a+b-c}{2}$; $r = \frac{a+b-\sqrt{a^2+b^2}}{2}$; $R + r = \frac{1}{2}(a+b)$	

Окончание таблицы

Содержание формулы	Формула	Символы (обозначения)
Площадь (S)	$S = \frac{1}{2}ab$	a, b — длины катетов

Правильный треугольник

Содержание формулы	Формула	Символы (обозначения)
Периметр (P)	$P = 3a$	a — длина стороны
Величина угла	$A = B = C = 60°$	A, B, C — величины углов
Зависимость между высотой и стороной	$h = \frac{a\sqrt{3}}{2}$	h — длина высоты; a — длина стороны; R — радиус описанной окружности; r — радиус вписанной окружности
Зависимость между стороной, радиусами вписанной и описанной окружностей	$a = R\sqrt{3}$; $R = 2r$; $R = \frac{a\sqrt{3}}{3}$; $r = \frac{a\sqrt{3}}{6}$	
Выражение площади (S) через сторону, радиус описанной окружности, радиус вписанной окружности	$S = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$; $S = \frac{3R^2\sqrt{3}}{4}$; $S = 3r^2\sqrt{3}$	a — длина стороны; R — радиус описанной окружности; r — радиус вписанной окружности

Четырехугольник

Содержание формулы	Формула	Символы (обозначения)
Сумма углов	$A + B + C + D = 360°$	A, B, C, D — величины углов; A, C и B, D — величины пар противоположных углов;
Свойство сумм величин противоположных углов вписанного четырехугольника	$A + C = B + D = 180°$	

Окончание таблицы

Содержание формулы	Формула	Символы (обозначения)
Свойство сумм длин противоположных сторон описанного четырехугольника	$a + c = b + d$	a, c и b, d — длины пар противоположных сторон; m, n — длины диагоналей
Теорема Птолемея	$mn = ac + bd$	
Площадь (S)	$S = \frac{1}{2}mn \sin \varphi$; $S = pr$	m, n — длины диагоналей; φ — величина угла между ними; p — полупериметр; r — радиус вписанной окружности

Параллелограмм

Содержание формулы	Формула	Символы (обозначения)
Периметр (P)	$P = 2(a + b)$	a, b — длины сторон; m, n — длины диагоналей; h_a, h_b — длины высот; B — величина угла между сторонами; m, n — длины диагоналей; φ — величина угла между диагоналями
Соотношение между квадратами длин сторон и диагоналей	$m^2 + n^2 = 2(a^2 + b^2)$	
Площадь (S)	$S = a \cdot h_a = b \cdot h_b$; $S = ab \sin B$; $S = \frac{1}{2}mn \sin \varphi$	
Свойства углов	$A + B + C + D = 360°$; $A = C$; $B = D$; $A + B = B + C = 180°$	A, B, C, D — величины углов

Прямоугольник

Содержание формулы	Формула	Символы (обозначения)
Периметр (P)	$P = 2(a + b)$	**a, b — длины сторон; d — длина диагонали; φ — величина угла между диагоналями**
Площадь (S)	$S = ab$; $S = \frac{1}{2}d^2 \sin\varphi$	

Ромб

Содержание формулы	Формула	Символы (обозначения)
Периметр (P)	$P = 4a$	**a — длина стороны; h —длина высоты; m, n — длины диагоналей**
Площадь (S)	$S = ah$; $S = \frac{1}{2}mn$	

Квадрат

Содержание формулы	Формула	Символы (обозначения)
Углы	$A = B = C = D = 90°$	**A, B, C, D — величины углов**
Связь между длиной стороны и радиусом описанной окружности	$a = R\sqrt{2}$; $R = \frac{a\sqrt{2}}{2}$	**a — длина стороны; R — радиус описанной окружности; r — радиус вписанной окружности**
Связь между длиной стороны и радиусом вписанной окружности	$r = \frac{a}{2}$; $a = 2r$	
Площадь (S)	$S = a^2$; $S = 2R^2$	

Трапеция

Содержание формулы	Формула	Символы (обозначения)
Свойство средней линии	$m = \frac{a+b}{2}$	m — длина средней линии; a, b — длины оснований; h — длина высоты
Площадь (S)	$S = \frac{a+b}{2} \cdot h; S = m \cdot h$	

Правильный многоугольник

Содержание формулы	Формула	Символы (обозначения)
Сумма внутренних углов ($\sum$)	$\sum = (n-2) \cdot 180°$	n — число сторон; A — величина угла; a_n — длина стороны; r — радиус вписанной окружности; R — радиус описанной окружности
Угол	$A = \frac{180°(n-2)}{n}$	
Связь между длиной стороны и радиусом вписанной окружности	$a_n = 2r \operatorname{tg} \frac{180°}{n}$; $r = \frac{a_n}{2\operatorname{tg} \frac{180°}{n}}$	
Связь между длиной стороны и радиусом описанной окружности	$a_n = 2R \sin \frac{180°}{n}$; $a_3 = R\sqrt{3}$; $a_4 = R\sqrt{2}$; $a_6 = R$	
Площадь (S)	$S = \frac{1}{2} arn$; $S = \frac{1}{2} R^2 n \sin \frac{360°}{n}$	a — длина стороны; n — число сторон; r — радиус вписанной окружности; R — радиус описанной окружности

Окружность и круг

Содержание формулы	Формула	Символы (обозначения)
Длина окружности (C)	$C = 2\pi R$	C — длина окружности; R — радиус окружности; n — градусная мера дуги; φ — радианная мера дуги; R — радиус круга; d — диаметр; b — основание сегмента; h — высота сегмента
Длина дуги (l)	$l = \frac{\pi R n}{180}$; $l = \varphi R$	
Площадь круга (S)	$S = \pi R^2$; $S = \frac{\pi d^2}{4}$	
Площадь сектора (S)	$S = \frac{\pi R^2 n}{360°}$	
Площадь сегмента (S)	$S = \frac{\pi R^2 n}{360} + S_\Delta$; $S \approx \frac{2}{3} bh$	

Тригонометрические тождества

$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$; $\sin(-\alpha) = -\sin\alpha$; $\operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{ctg}\alpha = 1$;

$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$; $\cos(-\alpha) = \cos\alpha$; $\operatorname{tg}(-\alpha) = -\operatorname{tg}\alpha$; $1 + \operatorname{tg}^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha}$;

$\operatorname{ctg}\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$; $\operatorname{ctg}(-\alpha) = -\operatorname{ctg}\alpha$; $1 + \operatorname{ctg}^2\alpha = \frac{1}{\sin^2\alpha}$;

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta;$$

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta;$$

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha\cos\beta + \sin\beta\sin\alpha;$$

$$\sin(\alpha - \beta) = \sin\alpha\cos\beta + \sin\beta\cos\alpha;$$

$$\operatorname{tg}(\alpha + \beta) = \frac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta}{1 - \operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{tg}\beta};$$

$$\operatorname{tg}(\alpha - \beta) = \frac{\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\beta}{1 + \operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{tg}\beta};$$

$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha;$$

$$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha;$$

$$\frac{1 + \cos 2\alpha}{2} = \cos^2\alpha;\ \frac{1 - \cos 2\alpha}{2} = \sin^2\alpha;\ \operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1 - \operatorname{tg}^2\alpha};$$

$$\sin\alpha+\sin\beta=2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2};$$

$$\sin\alpha-\sin\beta=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2};$$

$$\cos\alpha+\cos\beta=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2};$$

$$\cos\alpha-\cos\beta=-2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2};$$

$$\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta=\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos\alpha\cdot\cos\beta};$$

$$\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{tg}\beta=\frac{\sin(\alpha-\beta)}{\cos\alpha\cdot\cos\beta}.$$

Формулы приведения

Функция	Аргумент			
	$90° + \alpha$	$90° - \alpha$	$270° + \alpha$	$270° - \alpha$
$\sin x$	$\cos\alpha$	$\cos\alpha$	$-\cos\alpha$	$-\cos\alpha$
$\cos x$	$-\sin\alpha$	$\sin\alpha$	$\sin\alpha$	$-\sin\alpha$
$\operatorname{tg} x$	$-\operatorname{ctg}\alpha$	$\operatorname{ctg}\alpha$	$-\operatorname{ctg}\alpha$	$\operatorname{ctg}\alpha$
$\operatorname{ctg} x$	$-\operatorname{tg}\alpha$	$\operatorname{tg}\alpha$	$-\operatorname{tg}\alpha$	$\operatorname{tg}\alpha$

Функция	Аргумент			
	$180° + \alpha$	$180° - \alpha$	$360° + \alpha$	$360° - \alpha$
$\sin x$	$-\sin\alpha$	$\sin\alpha$	$\sin\alpha$	$-\sin\alpha$
$\cos x$	$-\cos\alpha$	$-\cos\alpha$	$\cos\alpha$	$\cos\alpha$
$\operatorname{tg} x$	$\operatorname{tg}\alpha$	$-\operatorname{tg}\alpha$	$\operatorname{tg}\alpha$	$-\operatorname{tg}\alpha$
$\operatorname{ctg} x$	$\operatorname{ctg}\alpha$	$-\operatorname{ctg}\alpha$	$\operatorname{ctg}\alpha$	$-\operatorname{ctg}\alpha$

Значения тригонометрических функций некоторых углов

Функция	Величина угла							
	$0°$	$30°$	$45°$	$60°$	$90°$	$180°$	$270°$	$360°$
$\sin x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	-1	0
$\cos x$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0	1
$\mathrm{tg}\, x$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	—	0	—	0
$\mathrm{ctg}\, x$	—	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	—	0	—

Приложение 2. Формулы стереометрии

Векторы и координаты

Содержание формулы	Формула	Символы (обозначения)
Правило треугольника	$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$	A, B, C — произвольные точки
Правило параллелограмма	$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OC}$	$OACB$ — параллелограмм
Правило многоугольника	$\overrightarrow{A_1A_2} + \overrightarrow{A_2A_3} + \ldots +$ $+ \overrightarrow{A_{n-1}A_n} = \overrightarrow{A_1A_n}$	$A_1, A_2 \ldots, A_{n-1}$ — произвольные точки
Правило параллелепипеда	$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OC_1}$	OA, OB, OC — ребра параллелепипеда; OC_1 — диагональ параллелепипеда
Формула вычитания	$\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = \overrightarrow{AB}$	A, B, O — произвольные точки
Признак коллинеарности двух ненулевых векторов	$\vec{b} = k \cdot \vec{a}$; $\lvert\vec{a} \cdot \vec{b}\rvert = \lvert\vec{a}\rvert \cdot \lvert\vec{b}\rvert$	k — число, отличное от нуля, $\vec{a} \neq \vec{0}$, $\vec{b} \neq \vec{0}$
Признак компланарности трех векторов	$\vec{p} = x\vec{a} + y\vec{b}$	x, y — числа
Середина отрезка	$\overrightarrow{OM} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB})$	M — середина отрезка AB; O — произвольная точка

Продолжение таблицы

Содержание формулы	Формула	Символы (обозначения)
Точка пересечения медиан (*центроид*)	$\overrightarrow{OM} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC})$	M — центроид треугольника ABC; O — произвольная точка
Скалярное произведение векторов	$\vec{a} \cdot \vec{b} = \lvert\vec{a}\rvert \cdot \lvert\vec{b}\rvert \cos \angle(\vec{a}; \vec{b})$	$\vec{a}, \vec{b}$ — ненулевые векторы
Сложение и вычитание векторов в координатах	$\vec{a} \pm \vec{b} = (x_1 \pm x_2, y_1 \pm y_2, z_1 \pm z_2)$	$\vec{a}\,(x_1; y_1; z_1)$; $\vec{b}\,(x_2; y_2; z_2)$
Умножение вектора на число	$k\vec{a}(kx; ky; kz)$	k — число; $\vec{a}(x; y; z)$
Скалярное произведение	$\vec{a} \cdot \vec{b} = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2$	$\vec{a}\,(x_1; y_1; z_1)$; $\vec{b}\,(x_2; y_2; z_2)$; φ — величина угла между векторами
Косинус угла между векторами	$\cos \varphi = \dfrac{x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2}{\sqrt{x_1^2+y_1^2+z_1^2} \cdot \sqrt{x_2^2+y_2^2+z_2^2}}$	
Длина вектора	$\lvert\vec{a}\rvert = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$	$\vec{a}(x; y; z)$
Расстояние между точками A и B	$AB = \sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(y_2-y_1)^2}$	$A(x_1; y_1; z_1)$; $B(x_2; y_2; z_2)$
Уравнение плоскости	$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$	$\vec{n}\,(A; B; C)$ — вектор, перпендикулярный плоскости; $M_0\,(x_0; y_0; z_0)$ — точка, принадлежащая плоскости

Продолжение таблицы

Содержание формулы	Формула	Символы (обозначения)
Общее уравнение плоскости	$Ax + By + Cz + D = 0$	$M\ (x;\ y;\ z)$ — любая точка плоскости
Косинус угла между двумя плоскостями **Условие перпендикулярности двух плоскостей** **Условие параллельности двух плоскостей**	$\cos\varphi = \dfrac{\lvert A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2\rvert}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2} \cdot \sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}$; $A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0$; $\dfrac{A_1}{A_2} + \dfrac{B_1}{B_2} = \dfrac{C_1}{C_2}$	$A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$; $A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$; — плоскости; φ — величина угла между этими плоскостями
Расстояние от точки до плоскости (d)	$d = \dfrac{\lvert Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D\rvert}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$	$M_0\ (x_0;\ y_0;\ z_0)$ — точка; $Ax + By + Cz + D = 0$ — плоскость
Параметрические уравнения прямой	$\vec{r} = \vec{r}_0 + k\vec{p}$; $\begin{cases} x = x_0 + ka_1, \\ y = y_0 + ka_2, \\ z = z_0 + ka_3 \end{cases}$	$\vec{r}$ — радиус-вектор произвольной точки прямой; $\vec{r}_0$ — радиус-вектор данной точки прямой; $\vec{p}$ — направляющий вектор прямой; k — параметр; $M_0\ (x_0;\ y_0;\ z_0)$ — данная точка прямой; $M\ (x;\ y;\ z)$ — любая точка прямой; $\vec{p}\ (a_1;\ a_2;\ a_3)$ — направляющий вектор прямой

Окончание таблицы

Содержание формулы	Формула	Символы (обозначения)
Уравнения прямой по двум ее точкам **Косинус угла между двумя прямыми** **Условие перпендикулярности двух прямых** **Условие параллельности двух прямых**	$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{z-z_1}{z_2-z_1}$; $\cos\varphi = \frac{\lvert a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3\rvert}{\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}\cdot\sqrt{b_1^2+b_2^2+b_3^2}}$; $a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3=0$; $\frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2}=\frac{a_3}{b_3}$	$M_1(x_1; y_1; z_1)$, $M_2(x_2; y_2; z_2)$ — данные точки; $\vec{p}_1(a_1; a_2; a_3)$, $\vec{p}_1(b_1; b_2; b_3)$ — направляющие векторы прямых; φ — величина угла между ними
Синус угла между прямой и плоскостью **Условие перпендикулярности прямой и плоскости** **Условие параллельности прямой и плоскости**	$\sin\varphi = \frac{\lvert Aa_1+Ba_2+Ca_3\rvert}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}}$; $\frac{A}{a_1}=\frac{B}{a_2}=\frac{C}{a_3}$; $Aa_1+Ba_2+Ca_3=0$	$Ax+By+Cz+D=0$ — плоскость; $\vec{p}(a_1; a_2; a_3)$ — направляющий вектор прямой; φ — величина угла между прямой и плоскостью

Многогранники

Содержание формулы	Формула	Символы (обозначения)
Площадь поверхности куба (S)	$S=6a^2$	a — длина ребра куба
Площадь боковой поверхности прямой призмы ($S_{бок}$)	$S_{бок}=P\cdot h$	P — периметр основания; h — высота (длина бокового ребра)

Продолжение таблицы

Содержание формулы	Формула	Символы (обозначения)
Площадь боковой поверхности наклонной призмы ($S_{бок}$)	$S_{бок} = P \cdot l$	**P — периметр перпендикулярного сечения; l — длина бокового ребра**
Площади боковой поверхности прямого параллелепипеда ($S_{бок}$)	$S_{бок} = P \cdot l$	**P — периметр основания; l — длина бокового ребра**
Площадь боковой поверхности правильной пирамиды ($S_{бок}$)	$S_{бок} = \frac{1}{2} P \cdot a$; $S_{бок} = \frac{Q}{\cos \varphi}$	**P — периметр основания; a — апофема; Q — площадь основания; φ — величина двугранного угла при стороне основания**
Площадь боковой поверхности правильной усеченной пирамиды ($S_{бок}$)	$S_{бок} = \frac{P + P_1}{2} \cdot h$	**P, P_1 — периметры оснований; h — апофема**
Объем куба (V)	$V = a^3$	**a — длина ребра куба**
Объем прямоугольного параллелепипеда (V)	$V = abc$	**a, b, c — измерения параллелепипеда**
Объем призмы (параллелепипеда) (V)	$V = S_{осн} \cdot h$; $V = Q \cdot l$	**$S_{осн}$ — площадь основания; h —высота; Q — площадь перпендикулярного сечения; l — длина бокового ребра**
Объем пирамиды (V)	$V = \frac{1}{3} S_{осн} \cdot h$	**$S_{осн}$ — площадь основания; h — высота**

Окончание таблицы

Содержание формулы	Формула	Символы (обозначения)
Объем усеченной пирамиды (V)	$V = \frac{1}{3}h(Q_1 + \sqrt{Q_1Q_2} + Q_2)$	Q_1, Q_2 — площади оснований; h — высота
Отношение объемов двух тетраэдров $MABC$ и $M_1A_1B_1C_1$, имеющих равные трехгранные углы с вершинами M и M_1	$\frac{V_{M_1A_1B_1C_1}}{V_{MABC}} = \frac{M_1A_1 \cdot M_1B_1 \cdot M_1C_1}{MA \cdot MB \cdot MC}$	MA, MB, MC, M_1A_1, M_1B_1, M_1C_1 — длины ребер тетраэдров

Фигуры вращения

Содержание формулы	Формула	Символы (обозначения)
Площадь боковой поверхности цилиндра ($S_{бок}$)	$S_{бок} = 2\pi R \cdot h$	R — радиус основания; h — высота
Площадь полной поверхности цилиндра ($S_{полн}$)	$S_{полн} = 2\pi R(h + R)$	R — радиус основания; h — высота
Площадь боковой поверхности конуса ($S_{бок}$)	$S_{бок} = \pi Rl$	R — радиус основания; l — длина образующей
Площадь полной поверхности конуса ($S_{полн}$)	$S_{полн} = \pi R(l + R)$	R — радиус основания; l — длина образующей
Площадь боковой поверхности усеченного конуса ($S_{бок}$)	$S_{бок} = \pi l(R + r)$	R, r — радиусы оснований; l — длина образующей
Площадь сферы (S)	$S = 4\pi R^2$	R — радиус сферы
Площадь сегментной поверхности (S)	$S = 2\pi R \cdot H$	R — радиус сферы; H — высота сегментной поверхности

Окончание таблицы

Содержание формулы	Формула	Символы (обозначения)
Площадь шарового пояса (S)	$S = 2\pi R \cdot H$	R — радиус шара; H — высота шарового пояса
Площадь поверхности шарового сектора (S)	$S = \pi R \cdot (2h + \sqrt{2Rh - h^2})$	R — радиус шара; h — высота шарового сегмента
Объем цилиндра (V)	$V = \pi R^2 \cdot H$	R — радиус основания; H — высота
Объем конуса (V)	$V = \frac{1}{3}\pi R^2 \cdot H$	R — радиус основания; H — высота
Объем усеченного конуса (V)	$V = \frac{1}{3}\pi H(r^2 + Rr + R^2)$	R, r — радиусы оснований; H — высота
Объем шара (V)	$V = \frac{4}{3}\pi R^3$; $V = \frac{1}{6}\pi d^3$	R — радиус шара; d — диаметр шара
Объем шарового слоя (V)	$V = \frac{\pi H}{6}(3r_1^2 + 3r_2^2 + H^2)$	r_1, r_2 — радиусы оснований шарового слоя; H — высота
Объем шарового сегмента (V)	$V = \pi H^2\left(R - \frac{H}{3}\right)$; $V = \frac{\pi H}{6}(3r^2 + H^2)$	R — радиус шара; H — высота; r — радиус основания шарового сегмента
Объем шарового сектора (V)	$V = \frac{2}{3}\pi R^2 \cdot H$	R — радиус шара; H — высота

ОГЛАВЛЕНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ 3

ЗАДАЧИ ДЛЯ ПОВТОРЕНИЯ ТЕОРЕМ 10 КЛАССА 5

Глава 1. ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ПРОСТРАНСТВА

Задачи к § 1, 2. Отображения пространства.
Преобразования пространства 8
Задачи к § 3. Движения пространства.
Общие свойства движений 9
Задачи к § 4. Симметрия относительно плоскости 14
Задачи к § 5. Параллельный перенос.
Скользящая симметрия 17
Задачи к § 6. Поворот вокруг оси. Осевая симметрия.
Зеркальный поворот. Винтовое движение 19
Задачи к § 7, 8. Взаимосвязь различных видов движений.
Гомотетия и подобие пространства 24
Задачи после главы 1 «Преобразования пространства» 27

Глава 2. МНОГОГРАННИКИ

Задачи к § 9. Понятие многогранника 31
Задачи к § 10—11.1. Объемы многогранников.
Определение призмы. Виды призм 33
Задачи к 11.2. Боковая и полная поверхности призмы 37
Задачи к 11.3. Объем призмы 40
Задачи к § 12. Параллелепипед 43
Задачи к § 13. Трехгранные и многогранные углы 58
Задачи к 14.1, 14.2. Определение пирамиды
и ее элементов. Некоторые виды пирамид 60
Задачи к 14.3. Правильная пирамида 64
Задачи к 14.4. Площади боковой
и полной поверхностей пирамиды 69
Задачи к 14.5, 14.6. Свойства параллельных сечений
пирамиды. Усеченная пирамида 72
Задачи к 14.7, 14.8. Объем пирамиды.
Об объеме тетраэдра 73
Задачи к 14.9. Объем усеченной пирамиды 78
Задачи к § 15. Правильные многогранники 79
Задания для склеивания многогранников 81
Задачи после главы 2 «Многогранники» 83

Глава 3. ФИГУРЫ ВРАЩЕНИЯ

Задачи к 16, 17.1, 17.2. Фигуры вращения. Определение цилиндра вращения и его элементов. Свойства цилиндра 86
Задачи к 17.3. Развертка и площадь поверхности цилиндра 88
Задачи к 17.4. Призмы, вписанные в цилиндр и описанные около цилиндра 89
Задачи к 17.5. Объем цилиндра 91
Задачи к 18.1—18.5. Определение конуса и его элементов. Сечения конуса. Касательная плоскость к конусу. Изображение конуса. Развертка и площадь поверхности конуса 92
Задачи к 18.6—18.9. Свойства параллельных сечений конуса. Вписанные в конус и описанные около конуса пирамиды. Усеченный конус. Поверхность усеченного конуса 95
Задачи к 18.10. Объем конуса и усеченного конуса 98
Задачи к 19.1, 19.2. Определение шара, сферы и их элементов. Изображение сферы 100
Задачи к 19.3. Уравнение сферы 101
Задачи к 19.4, 19.5. Пересечение шара и сферы плоскостью. Плоскость, касательная к сфере и шару 104
Задачи к 19.6. Вписанные и описанные шары и сферы 115
Задачи к 19.7, 19.8. Площади поверхностей шара и его частей. Объем шара и его частей 133
Задачи после главы 3 «Фигуры вращения» 139
Задания для склеивания многогранников 145

ОТВЕТЫ И УКАЗАНИЯ К ЗАДАЧАМ

Глава 1. Преобразования пространства 147
Глава 2. Многогранники 149
Глава 3. Фигуры вращения 155

ДОПОЛНЕНИЯ

Может быть или не может быть? 163
Ответы к «Может быть или не может быть?» 169
Задачи на нахождение наибольшего и наименьшего значений 169
Конкурсные задачи для поступающих в вузы 178
Теоремы геометрии 11 класса 214

ПРИЛОЖЕНИЯ

Приложение 1. Формулы планиметрии 218
Приложение 2. Формулы стереометрии 227

Учебное издание

Потоскуев Евгений Викторович
Звавич Леонид Исаакович

ГЕОМЕТРИЯ

11 класс

Задачник для общеобразовательных учреждений с углубленным и профильным изучением математики

Зав. редакцией *Г. Н. Хромова*
Редактор *Г. Н. Хромова*
Художественный редактор *А. А. Абрамова*
Технические редакторы *И. В. Грибкова, В. Ф. Козлова*
Компьютерная верстка *Г. А. Фетисова*
Корректор *Г. И. Мосякина*

Санитарно-эпидемиологическое заключение
№ 77.99.02.953.Д.006315.08.03 от 28.08.2003.

Подписано к печати 01.03.04.
Формат $60\times90^1/_{16}$. Бумага типографская.
Гарнитура «Школьная». Печать офсетная.
Усл. печ. л. 13,0. Тираж 16 000 экз. Заказ № 5145.

ООО «Дрофа». 127018, Москва, Сущевский вал, 49.

По вопросам приобретения продукции
издательства «Дрофа» обращаться по адресу:
127018, Москва, Сущевский вал, 49.
Тел.: (095) 795-05-50, 795-05-51. Факс: (095) 795-05-52.

Торговый дом «Школьник».
109172, Москва, ул. Малые Каменщики, д. 6, стр. 1А.
Тел.: (095) 911-70-24, 912-15-16, 912-45-76.

Магазины «Переплетные птицы»:
127018, Москва, ул. Октябрьская, д. 89, стр. 1.
Тел.: (095) 912-45-76;

140408, Московская обл., г. Коломна, Голутвин,
ул. Октябрьской революции, 366/2.
Тел.: (095) 741-59-76.

Отпечатано с готовых диапозитивов
в АО «Московские учебники и Картолитография».
125252, Москва, ул. Зорге, 15.